

## Solutions de questions de licence

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 280-284

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_280\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__280_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

---

### Question C.33.

(Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique; énoncé publié en janvier 1926, p. 118).

#### SOLUTION

Par JACQUES DEVISME.

1° On demandait d'intégrer le système

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + z, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}, \end{cases}$$

système linéaire à coefficients constants. En cherchant des solutions de forme

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad z = \gamma e^{rt},$$

on trouve facilement

$$r = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma,$$

$$r = 1, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3},$$

$$r = 2, \quad \alpha = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{9}.$$

d'où la solution générale

$$(1) \quad \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = C_1 + 2 C_2 e^t + 4 C_3 e^{2t}, \\ z = C_1 + 3 C_2 e^t + 9 C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

En introduisant les valeurs initiales  $x_0, y_0, z_0$  pour  $t = 0$ , il vient

$$C_1 = 3x_0 - 3y_0 + z_0, \quad C_2 = \frac{-5x_0 + 8y_0 - 3z_0}{2}, \quad C_3 = \frac{x_0 - 2y_0 + z_0}{2}.$$

2° L'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$$

a pour système linéaire adjoint le système (S). Comme les équations (1) s'écrivent

$$\begin{aligned} C_1 &= 3x - 3y + z, \\ C_2 e^t &= \frac{-5x + 8y - 3z}{2}, \\ C_3 e^{2t} &= \frac{x - 2y + z}{2}, \end{aligned}$$

l'intégrale générale de (E) sera

$$(5x - 8y + 3z)^2 = (x - 2y + z) F(3x - 3y + z).$$

La surface intégrale qui passe par l'axe des  $x$  correspond à

$$25x^2 = x F(3x)$$

et a pour équation

$$3(5x - 8y + 3z)^2 = 25(x - 2y + z)(3x - y + z).$$

C'est un cône du second degré.

3° Enfin l'équation

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

a pour solution

$$f(x, y, z) = \Phi \left[ 3x - 3y + z, \frac{x - 2y + z}{(5x - 8y + 3z)^2} \right],$$

où  $\Phi$  est arbitraire.

Autre solution par A. MONJALLOX.

### Question C.36.

(*Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier 1926, p. 121.*)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Le point matériel M, de masse  $m$  est mobile dans le plan vertical (Q) [axes  $xOy$ ,  $Ox$  vertical et dirigé vers le bas] et soumis à son poids  $mg$  et à une force  $mk\overrightarrow{MO}$ . La fonction des forces est alors

$$U = m \left[ gx - \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \right],$$

et les lignes de niveau sont des cercles de centre I  $\left(x = \frac{g}{k}, y = 0\right)$  : on sait d'ailleurs que les deux forces  $mg$  et  $mk\overrightarrow{MO}$  se composent en une seule, proportionnelle à la distance et dirigée vers le point I.

2° Le point M étant mobile sur un cercle de rayon  $a$  et dont le point le plus haut est O, les positions d'équilibre correspondent aux maximum et minimum de MI, c'est-à-dire aux points O et A (A point le plus bas du cercle). L'équilibre est stable en A ou en O suivant que  $g - ak$  est positif ou négatif; équilibre indifférent si  $g - ak$  est nul.

3° Le théorème de la force vive permettra d'étudier le mouvement du point sur le cercle. Avec les données initiales de l'énoncé [mobile en A,  $v_0 = 2\sqrt{a(g - ak)}$ ], cette équation donne immédiatement

$$2a \frac{d\theta}{dt} = v_0 \cos\theta \quad (\theta = \widehat{Ox, OM}),$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{2a}{v_0} \text{L tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

4° La réaction du cercle dans le mouvement précédent est

$$R = m[6(g - ak) \cos^2\theta - g];$$

si  $5g - 6ak$  est négatif, R est constamment négative, dirigée vers l'extérieur du cercle. Si  $5g - 6ak$  est positif, elle s'annule pour une valeur  $\alpha$  telle que

$$\cos^2 \alpha = \frac{g}{6(g - ak)}.$$

Question C. 41.

(*Mathématiques générales, épreuve théorique de mécanique; énoncé publié en janvier 1926, p. 124.*)

SOLUTION.

Par A. MONJALLON.

1° Un disque circulaire homogène est mobile autour de son axe (horizontal) et un point P de la circonférence du disque est attiré par un point

fixe A, situé au-dessous du centre O et sur la verticale de ce point, la force correspondante étant  $k\overrightarrow{PA}$ .

Dans ces conditions,  $\theta$  étant l'angle de OP avec OA, le moment de la force par rapport au point O vaut  $-kaR\sin\theta$  et l'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{R^2}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -kaR\sin\theta,$$

le mouvement est donc synchrone de celui d'un pendule simple de longueur

$$\lambda = \frac{mRg}{2ka}.$$

2° Si, lorsque OP est horizontal, l'attraction subie par P égale le poids du disque, on aura

$$mg = k\sqrt{a^2 + R^2},$$

d'où

$$\lambda = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}},$$

dont les variations avec  $a$  sont évidentes.

### Question C. 53.

(Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en mars 1926, p. 181.)

#### SOLUTION.

Par CH. PIEDVAGHE.

1° La surface donnée (S)

$$x = v \cos u - a \sin u, \quad y = v \sin u + a \cos u, \quad z = au$$

est engendrée par une droite ( $u = \text{const.}$ ) qui resté horizontale, tangente au cylindre  $x^2 + y^2 = a^2$ , le point de contact décrivant l'hélice  $v = 0$ .

Les trajectoires orthogonales des courbes  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} v &= au + C, \\ v &= a\sqrt{2} \operatorname{tang}(u\sqrt{2} + C'). \end{aligned}$$

2° Les asymptotiques sont les génératrices et les courbes

$$2v = au + C,$$

et, comme les équations (S) entraînent

$$x^2 + y^2 = a^2 + v^2,$$

ces dernières courbes sont bien sections de S par les hyperboloïdes

$$(H) \quad 4x^2 + 4y^2 = (z - C)^2 + 4a^2.$$

3° Les surfaces ( $\Sigma$ ), trajectoires orthogonales des hyperboloïdes H sont engendrées par les courbes qui, dans les plans passant par Oz, coupent à angle droit les méridiennes des (H) : dans le plan  $y = 0$  elles sont définies par

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{x^2 - a^2}{4x^2}$$

dont l'intégration est immédiate.

4° L'équation aux rayons de courbure principaux de (S) s'écrit

$$a^2 R^2 - a^2 R \sqrt{a^2 + v^2} - (a^2 + v^2)^2 = 0;$$

elle entraîne, entre ces rayons, la relation indépendante des coordonnées

$$(R_1 + R_2)^4 + a^2 R_1 R_2 = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.