Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 26-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__26_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2455.

(1923, p. 189.)

On considère quatre sphères de centres O_1, O_2, O_3, O_4, *qui admettent un centre radical* C *et une sphère* (S) *concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre* $O_1O_2O_3O_4$. *Montrer que le centre de la sphère inscrite au tétraèdre déterminé par les plans radicaux de la sphère* (S), *respectivement avec les sphères* O_1, O_2, O_3, O_4, *coïncide avec le centre radical* C.

Application. — *Étant donné un tétraèdre quelconque* (X), *déterminer un point* P *de l'espace qui soit le centre de la sphère inscrite au tétraèdre* (O) *dont les sommets sont les projections orthogonales de* P *sur les faces du tétraèdre* (X). V. Thébault.

Solution
par E. Bally.

Lemme : *Si les rayons unissant les sommets d'un tétraèdre* (X) *au centre de la sphère* (C_x) *qui lui est circonscrite sont perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre* (Y), *les perpendiculaires abaissées des sommets de* (Y) *sur les faces correspondantes de* (X) *concourent au centre d'une sphère* (I_y) *inscrite à* (Y).

D'après l'hypothèse, les faces de (Y) sont parallèles à celles du tétraèdre (T) des plans tangents à (C_x) aux sommets de (X). Par l'homothétie qui transforme (T) en (Y), le tétraèdre (X) se transforme dans le tétraèdre (Z) des points de contact d'une sphère inscrite à (Y), et les perpendiculaires abaissées des sommets de (Y) sur les faces de (X), étant aussi perpendiculaires aux faces de (Z), concourent au centre de la sphère qui touche les faces de (Y) aux sommets de (Z).

Application. — Rappelons que, relativement à un tétraèdre donné, deux points isogonaux peuvent être caractérisés par cette propriété que les droites qui joignent l'un d'eux aux sommets de ce tétraèdre sont perpendiculaires aux faces du tétraèdre des projections orthogonales de l'autre point, sur les faces du tétraèdre donné.

Si le point P est centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (Y) de ses projections orthogonales sur les faces du tétraèdre (X), les perpendiculaires abaissées des sommets de (X) sur les faces de (Y) sont concourantes, d'après la réciproque du lemme, au centre de la sphère (Cx) circonscrite à (X), et le point P est donc le conjugué isogonal, relatif au tétraèdre donné (X), du centre de la sphère qui lui est circonscrite.

(Le point qui, dans le plan, jouit de la propriété similaire, est l'orthocentre du triangle, conjugué isogonal du centre du cercle circonscrit et centre d'un cercle inscrit au triangle des pieds des hauteurs.)

Question proposée. — Chaque sommet du tétraèdre (R) des plans radicaux envisagés est le centre radical commun à la sphère (S) et à trois des sphères (O). Il appartient à l'axe radical de ces trois sphères (O), qui est donc la perpendiculaire de ce sommet de (R) sur le plan des centres des trois sphères (O).

Les perpendiculaires sont abaissées des sommets de (R) sur les faces du tétraèdre des centres des quatre sphères (O), axes radicaux de ces sphères (O) prises trois à trois, concourent au centre radical de ces quatre sphères, qui est donc, d'après le lemme, le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (R), puisque les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre (O) sur les faces de (R) concourent au centre de la sphère circonscrite à (O).

2463.

(1923-1924, p. 75)

Soient ABC, A′B′C′ *deux triangles inscrits à une même conique. Les six points* (AA′, BC), (AA′, B′C′), (BB′, CA), (BB′, C′A′), (CC′, AB), (CC′, A′B′), *sont sur une même conique.* R. B.

SOLUTION

par G. ROY.

Soient D et E les intersections de BC′ et CB′ avec AA′; l'hexagone C′A′ABB′CC′ étant inscriptible dans la conique donnée, les points (CC′, AB), (BB′, A′C′) et E sont en ligne droite; de même (CC′, A′B′), (BB′, AC) et D sont alignés. Les deux faisceaux de coniques circonscrites aux deux quadrilatères : (BB′, AC), (BB′, A′C′), (CC′, AB), (CC′, A′B′) et BB′CC′ rencontrent donc AA′ en des points qui se correspondent dans la même involution et par suite les groupes de points, (AA′, BC), (AA′, B′C′), (BB′, C′A′), (CC′, AB), (CC′, A′B′); (BB′, CA), A, (BB′, CA), (BB′, C′A′), A′, (CC′, AB), (CC′, A′B′) et deux groupes analogues sont situés sur des coniques.

Autre solution de M. BOUVAIST.