NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificat de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 254-256
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__254_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soit* $Ox_1y_1z_1$ *un trièdre trirectangle fixe où l'axe* Oz_1 *est vertical ascendant.*

Un des côtés, AB, *d'une plaque carrée, homogène, d'épaisseur négligeable*, ABCD *reste dans le plan* x_1Oy_1; *de plus la perpendiculaire à* AB *menée par le centre* G *de la plaque est assujettie à passer par le point* P *de* Oz_1 *dont la cote est* h $(h > 0)$. *On prendra pour paramètres l'angle* $\psi = \widehat{Ox_1, AB}$ *et l'angle* θ *que la plaque fait avec le plan horizontal* x_1Oy_1.

1° *Trouver l'axe instantané de rotation et de glissement* Δ *de la plaque pour un mouvement quelconque compatible avec les liaisons, c'est-à-dire tel que* θ *et* ψ *soient des fonctions, censées connues, du temps* t. *Quel est pour une position donnée de la plaque le lieu* S *de cet axe lorsqu'on fait varier le rapport des vitesses angulaires* θ' *et* ψ' ?

On supposera que pour la position considérée $\psi = 0$, *et l'on rapportera les équations de* Δ *et de* S *à des axes parallèles à* $Ox_1\,Oy_1\,Oz_1$ *choisis de façon que les équations soient aussi simples que possible.*

2° *Écrire les équations différentielles du mouvement de la plaque, la seule force donnée étant le poids et le frottement étant négligé;*

montrer que ces équations s'intègrent par des quadratures. On ne fera pas de discussion. Pour cette question on admettra que le côté de la plaque a pour longueur $4h$.

3° *L'angle θ peut-il, au cours d'un mouvement de cette nature, garder une valeur constante? Dans cette dernière question, on fera usage de notations abrégées en désignant par α et β les coefficients de ψ'^2 et θ'^2 dans l'expression de la force vive.*

Indications sur la solution. — 1° Le mouvement de la plaque peut se décomposer en un mouvement d'entraînement où ψ varie seul et un mouvement relatif où θ varie seul; pour chacun de ces mouvements il y a une rotation tangente. Les vecteurs rotations instantanées sont l'un, ψ', porté par Oz_1; l'autre, θ', porté par une parallèle à AB (et par suite à Ox_1); cette parallèle se projette horizontalement suivant AB, et rencontre la normale à la plaque passant en P.

On en déduit le torseur des rotations instantanées dans le mouvement résultant; ses coordonnées plückériennes s'obtiennent en ajoutant celles des deux vecteurs précédents. Prenons des axes O'XYZ se déduisant de $Ox_1y_1z_1$ par une translation parallèle à Oz_1 telle que le vecteur θ' soit dans le plan $Z = 0$; on trouve, tous calculs faits, pour coordonnées du torseur

$$\theta', \quad 0, \quad \psi', \quad 0, \quad 0, \quad h\theta' \cot\theta \qquad \left(\theta' = \frac{d\theta}{dt}, \ \psi' = \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Les équations de l'axe instantané, axe central du torseur, sont

$$(\Delta) \qquad \psi' X - \theta' Z = 0, \qquad (\theta'^2 + \psi'^2) Y + h\theta'^2 \cot\theta = 0.$$

Le lieu de Δ lorsque le rapport $\frac{\theta'}{\psi'}$ varie est le conoïde du troisième ordre (cylindroïde) d'équation

$$(S) \qquad (X^2 + Z^2) Y + hX^2 \cot\theta = 0.$$

2° Les équations de Lagrange sont applicables; la force vive, calculée par le théorème de Kœnig est

$$2T = \alpha\psi'^2 + \beta\theta'^2,$$

$$\alpha = Mh^2 \left[\frac{\cos^2\theta(1 - 2\sin\theta)^2}{\sin^2\theta} + \frac{4}{3}(1 + \cos^2\theta)\right],$$

$$\beta = Mh^2 \left[\frac{1 - 4\sin^3\theta + 4\sin^4\theta}{\sin^4\theta} + \frac{4}{3}\right];$$

il y a fonction des forces données

$$U = -2Mgh\sin\theta + \text{const.}$$

L'équation de Lagrange relative à ψ donne l'intégrale première

$$(1) \qquad \alpha\psi' = k$$

qu'on retrouve par application du théorème du moment cinétique relatif à Oz_1. A l'équation de Lagrange relative à θ on substitue l'intégrale première des forces vives (liaisons indépendantes du temps, sans frottement, fonction de forces données)

$$T = U + C \qquad (C \text{ const.})$$

qui donne en tenant compte de (1) l'équation

$$(2) \qquad \theta'^2 = \frac{(2C - 4Mgh\sin\theta)\alpha - k^2}{\alpha\beta} = f(\theta); \qquad t = \int \frac{d\theta}{\pm\sqrt{f(\theta)}}.$$

3° Si θ est constant, ψ' l'est aussi, d'après l'équation (1). La valeur est donnée en fonction de θ par l'équation de Lagrange en θ qui donne, pour $\theta' = \theta'' = 0$,

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\theta}\psi'^2 = Mgh\cos\theta.$$

Inversement, si ψ' est donné par (3) et si $\theta' = 0$ les équations du mouvement donnent $\psi'' = \theta'' = 0$; la condition trouvée est à la fois nécessaire et suffisante. Reste la discussion facile de l'équation (3).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les deux extrémités* A, B *d'une tige rectiligne homogène de longueur* $2l$ *glissent sans frottement sur deux droites rectangulaires* DD' *situées dans un même plan vertical et inclinées à* 45° *sur l'horizon.*

Dans ce même plan vertical un point matériel P, *dont la masse est la fraction* f *de celle de la tige, est relié au milieu* C *de la tige par un fil inextensible de masse négligeable, de longueur* l. *Étudier les petites oscillations du système pesant ainsi constitué. On appelle* θ *et* φ *les angles de* OC *et de* CP *avec la verticale descendante* OV, O *étant le point de concours de* D *et* D'.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Aux poids correspond la fonction de force

$$U = Mlg[(1+f)\cos\theta + f\cos\varphi]$$

qui est maximum pour $\theta = \varphi = 0$; c'est une position d'équilibre stable, et c'est la seule. On calcule la force vive du système et on la réduit à ses termes de moindre degré

$$2T_r = Ml^2\left[\left(\frac{4}{3} + f\right)\theta'^2 + f\varphi'^2 + 2f\varphi'\theta'\right].$$

On lui adjoint la fonction des forces réduite à ses termes du second degré

$$U_r = -Mlg\left[(1+f)\frac{\theta^2}{2} + \frac{f}{2}\varphi^2\right].$$

Cette force vive et cette fonction des forces réduites donnent des équations de Lagrange qui sont celles des petits mouvements et dont l'intégration par le procédé classique n'offre aucune difficulté.

(Grenoble, juin 1925.)