

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 248-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__248_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

C. 60. — ÉPREUVE THÉORIQUE. (Mécanique). — Un point matériel M , de masse m , se déplace sans frottement sur une droite horizontale Ox ; il est attaché à une extrémité d'un fil élastique de longueur naturelle l , qui, après avoir passé dans un petit anneau situé en O , a son autre extrémité fixée en un point situé sur la verticale de O , à une distance de ce point égale à l . On admet que le fil exerce sur le point M une force proportionnelle à son allongement, c'est-à-dire égale à $m \cdot k^2 \cdot \overline{MO}$ (k étant un coefficient numérique supposé connu).

Le point M est soumis en plus, de la part de l'air, à une résistance proportionnelle à la vitesse et dirigée en sens contraire, égale à $m \cdot \mu \cdot v$ (μ étant un coefficient numérique, très petit par rapport à k).

On lâche le point sans vitesse initiale en un point M_0 d'abscisse x_0 positive.

1° Étudier le mouvement. — Montrer qu'il se compose d'oscillations isochrones dont l'amplitude décroît en progression géométrique.

2° Dans une expérience réalisant ces conditions, on a trouvé qu'au bout de 1800 oscillations simples, l'amplitude se trouvait réduite aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur initiale. Calculer le rapport entre la durée d'une oscillation simple dans ces conditions et la durée d'une même oscillation simple s'il n'y avait pas résistance de l'air.

3° Dans une deuxième expérience, le fil se rompt au moment où le point M passe en O pour la première fois; quel sera le mouvement ultérieur du point M sous l'action de la seule résistance de l'air.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la fonction

$$y = \frac{[2M + \log x]^2}{x}$$

(où les logarithmes sont des logarithmes vulgaires et où

$$M = \log e = 0,43429).$$

1° Indiquer sommairement les variations de la fonction y .

2° Représenter sur papier millimétrique, de façon aussi exacte que possible, la partie de la courbe représentative correspondant à $0,1 < x < 1,1$ en calculant les ordonnées pour des valeurs de x variant de dixième en dixième.

On prendra 10^{cm} pour représenter l'unité de longueur en abscisses et 20^{cm} pour l'unité d'ordonnée.

3° Évaluer par une méthode approchée au choix du candidat l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les droites $x = 0,1$ et $x = 1,1$.

Comparer le résultat obtenu avec le calcul direct de l'intégrale définie

$$\int_{0,1}^{1,1} \frac{[2M + \log x]^2}{x} dx.$$

(Strasbourg, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Courbure en un point d'une surface d'une section plane de cette surface. Étudier comment elle varie : 1° quand la section tourne autour d'une tangente donnée à la surface; 2° quand elle tourne autour de la normale.

II. Soit l'équation

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (n \text{ entier positif}).$$

1° Montrer qu'elle admet comme solution particulière un certain polynôme $P(x)$ de degré n .

2° Montrer que le changement d'inconnue $y = zP(x)$ conduit à une équation en z qui s'intègre par deux quadratures de fonctions rationnelles.

3° Effectuer les calculs pour $n = 1$.

Indication sur la solution de II. — La détermination de la solution particulière P se fait en substituant un polynôme de degré n .

La transformation en z donne une équation linéaire ne contenant pas z parce que P est une solution. z' est une intégrale de

$$(1 - x^2)Pu' + [2(1 - x^2)P' - 2xP]u = 0,$$

donnant

$$\frac{u'}{u} = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2P'}{P},$$

donc z' fraction rationnelle de x .

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur la parabole*

$$y^2 = 2px$$

se meut sans frottement un point non pesant attiré par le foyer en raison inverse du carré de la distance. Soit T la période du mouvement limité aux points ayant une abscisse x_0 donnée, T_0 celle des très petits mouvements :

1° Calculer $\frac{T}{T_0}$ en fonction de $\frac{x_0}{p}$; variation;

2° Déterminer $\frac{x_0}{p}$ sachant $\frac{T}{T_0} = 2$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation du mouvement est donnée par l'intégrale des forces vives

$$m(x'^2 + y'^2) = \frac{mk^2}{r} + h = \frac{mk^2(r_0 - r)}{rr_0},$$

r s'exprime en fonction de x par la propriété de la directrice et y'^2 en fonction de x' et x par l'équation, on a ainsi l'équation en x qui en faisant $\frac{x}{p} = u$ donne l'équation en u

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{8k^2}{p^2} \frac{(u_0 - u)u}{(2u_0 + 1)(2u + 1)^2}.$$

Dans un quart d'oscillation u varie de zéro à u_0 , donc

$$T = 4 \sqrt{2u_0 + 1} \sqrt{\frac{p^3}{8k^2}} \int_0^{u_0} \frac{(2u + 1) du}{\sqrt{(u_0 - u)u}}.$$

Intégrale définie d'un calcul classique qui donne T en fonction de u_0 et donne T_0 quand u_0 tend vers zéro.

(Bordeaux, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Rayon de convergence d'une série entière.* Comme exemple on calculera le rayon de convergence de la série

$$u_n = \left(\frac{nx}{n-1}\right)^n,$$

et l'on cherchera sa nature sur le cercle de convergence.

II. Soit, dans un plan vertical, un arc de cercle matériel AB dont tous les points sont plus bas que A. Sur cette courbe se meut sans frottement un point pesant M parti de A sans vitesse. En B ce point devient libre (parce que la courbe matérielle n'existe plus).

1° Montrer que la parabole qu'il décrit alors a pour directrice l'horizontale de A.

2° AB est un arc de cercle de rayon a , A est sur l'horizontale du centre O et $\widehat{AOB} = \pi - \alpha$, α étant un angle donné compris entre O et π . On demande l'équation de la parabole, les coordonnées de son sommet, le lieu de ce sommet quand α varie de O à $\frac{\pi}{2}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° h étant la distance verticale de A et B le mobile arrive en B avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ qui est la vitesse initiale sur la parabole. Or on sait ou on démontre immédiatement que la directrice d'une parabole de chute a pour directrice une horizontale située à la distance $\frac{v^2}{2g}$ au-dessus du point de départ; cette distance étant précisément h , la propriété annoncée est démontrée.

2° Prenant comme axes le diamètre horizontal et le diamètre vertical descendant, l'équation de la parabole est

$$y = a \sin \alpha - \frac{(x + a \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{(x + a \cos \alpha)^2}{4a \sin^3 \alpha}.$$

Les coordonnées du sommet sont

$$a \cos \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1), \quad a \sin^3 \alpha$$

et ces formules définissent le lieu demandé.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit la surface

$$z = x \operatorname{sh} y.$$

1° Calculer les angles que fait avec les axes Ox, Oy, Oz la normale à cette surface en un point. Vérifier que le long d'une courbe $x = \text{const.}$ l'angle avec Oy est constant.

2° Soit Σ la portion de cette surface qui a pour projection sur le plan des xy l'intérieur du rectangle limité par les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = a, \quad y = b \quad (a > 0, b > 0).$$

La densité de surface de Σ étant constante, calculer les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité de Σ .

3° Calculer numériquement ξ, η, ζ pour $a = b = 1$.

4° Lieu géométrique du centre de gravité quand a varie, b restant constant.

Nota. — On sait que

$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), \quad \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}),$$

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les cosinus directeurs de la normale sont

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y}, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y};$$

le second ne dépend que de x , d'où la propriété de la première partie. La surface de l'élément qui se projette suivant le rectangle élémentaire dx, dy est

$$\sqrt{1+x^2} \operatorname{ch} y \, dx \, dy.$$

Prenant la densité superficielle égale à l'unité on a pour $M, M\xi, M\eta$ et $M\zeta$ quatre intégrales doubles de la forme

$$\iint F(x) \Phi(y) \, dx \, dy$$

étendues au rectangle indiqué dans l'énoncé, intégrales qui se ramènent à des produits d'intégrales simples

$$\int_0^a F(x) \, dx \int_0^b \Phi(y) \, dy;$$

ces intégrales simples se calculent d'ailleurs facilement en tenant compte des propriétés connues des fonctions hyperboliques.

(Bordeaux, novembre 1924.)