

Solution de question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 1
(1925), p. 247-248

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__247_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE QUESTION DE LICENCE.

Question C. 26.

[Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en décembre 1925, p. 94.]

SOLUTION

par M. L. MENESSIER.

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z^2+z+1)},$$

et l'on demande de calculer la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$ le long des cercles C de centre O ne passant par aucun point singulier.

La fonction $f(z)$ admet le pôle *double* $z = 2$ et les deux pôles *simples*

$$z = \alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = \beta = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Considérons un cercle C_0 de rayon très grand; si ce dernier augmente indéfiniment, $|zf(z)|$ tend vers zéro et $\int_{C_0} f(z) dz$ tend aussi vers zéro.

Donc le résidu R_∞ au point à l'infini, de $f(z)$, est nul.

Sur un cercle C_1 de rayon > 2 , nous avons

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2i\pi(R_2 + R_\alpha + R_\beta),$$

R_p étant le résidu de $f(z)$ au point $z = p$.

Comme $R_\infty = 0$, on a aussi

$$R_2 + R_\alpha + R_\beta = 0$$

et

$$\int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

Soit un cercle C_2 de rayon compris entre 1 et 2,

$$\int_{C_2} f(z) dz = 2i\pi(R_\alpha + R_\beta) = -2i\pi R_2,$$

et comme

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} (z-2)^2 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{-(2z+1)}{(z^2+z+1)^2} \right] = -\frac{5}{49},$$

il vient

$$\int_{C_2} f(z) dz = \frac{10}{49} i \pi.$$

Enfin pour un cercle C_3 de rayon inférieur à 1,

$$\int_{C_3} f(z) dz = 0.$$

Autre solution par A. MONJALLON.