Concours d'agrégation de 1923

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 240-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__240_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1923.

Composition de Mathématiques spéciales.

Soit (C) *la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho = \frac{1}{\cos 3\theta + \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta},$$

où λ *et* μ *sont deux nombres donnés.*

I. *Un angle droit tourne autour de son sommet placé à l'origine, ses côtés rencontrent* (C) *en deux points* a *et* a'. *Enveloppe de* aa'.

Montrer que c'est une conique ayant un foyer à l'origine, la directrice correspondante étant la droite sur laquelle se trouvent les points d'inflexion de la courbe (C).

II. *Lieu géométrique des points de rencontre des tangentes en* a *et* a' *à la courbe* (C).

III. *La tangente en* a *à la courbe* C *rencontre cette courbe en un point* b *qui sera* dit associé *du point* a. *Calculer les angles polaires du point* b *connaissant un angle polaire de* a.

Former une équation ayant pour solutions les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 *où une droite* (A) *rencontre* (C). *En déduire une équation ayant pour solution les angles polaires des associés* b_1, b_2, b_3. *Prouver que* b_1, b_2, b_3 *sont sur une droite* (B).

[*On pourra prendre les équations de* (A) *et* (B) *sous la forme*

$$\frac{1}{\rho} = (u + \lambda)\cos\theta + (v + \mu)\sin\theta; \qquad \frac{1}{\rho} = (u' + \lambda)\cos\theta + (v' + \mu)\sin\theta.\Big]$$

IV. *A une droite* (A) *correspond une seule droite* (B). *Inversement à une* (B) *correspondent quatre droites* (A_1), (A_2), (A_3), (A_4).

(B) *étant telle que* (A_1) *et* (A_2) *soient confondues, déterminer :* 1° *l'enveloppe de cette droite* (A_1) *ou* (A_2); 2° *l'enveloppe de* (B); 3° *le lieu du point commun à* (A_3) *et* (A_4).

V. *Les quatre droites* (A) *correspondant à une* (B) *forment un quadrilatère. Les cercles qui ont pour diamètres les diagonales de ce quadrilatère se coupent en deux points. Démontrer que l'un de ces points a une position indépendante de* (B). *Lieu géométrique de l'autre quand* (B) *tourne autour d'un point fixe.*

On examinera le cas particulier où λ *et* μ *sont nuls.*

SOLUTION PAR JOSEPH DENAUX.

Il est assez indiqué d'établir d'abord la relation entre les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 où une droite (A) rencontre (C). En prenant l'équation de (A) sous la forme indiquée par l'énoncé

$$\frac{1}{\rho} = (u+\lambda)\cos\theta + (v+\mu)\sin\theta, \tag{1}$$

on trouve l'équation aux θ des points d'intersection

$$\cos 3\theta = u\cos\theta + v\sin\theta, \tag{2}$$

ou, en posant $\operatorname{tang}\theta = t$,

$$vt^3 + (u+3)t^2 + vt + u - 1 = 0,$$

d'où enfin, si t_1, t_2, t_3 sont les racines

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &\equiv t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{u+3}{v}, \\ s_2 &\equiv t_1 t_2 + \ldots = 1, \\ s_3 &\equiv t_1 t_2 t_3 = -\frac{u-1}{v}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Il en résulte enfin, entre les angles polaires θ_1, θ_2, θ_3 la relation

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{4}$$

chacun de ces angles n'est d'ailleurs défini qu'à un multiple de π près. D'autre part les paramètres u et v dont dépend l'équation de la droite (1) sont donnés par

$$(5) \qquad u = \frac{3s_3 + s_1}{s_1 - s_3}, \qquad v = \frac{-4}{s_1 - s_3}.$$

I. Les deux points a et a' correspondent à des paramètres t_1 et t_2 dont le produit est égal à -1. Posons

$$t_1 + t_2 = \sigma$$

et soit t le paramètre du troisième point d'intersection de la droite (aa') et de (C). Les équations (3) s'écrivent

$$(3') \qquad t + \sigma = -\frac{u+3}{v}, \qquad t\sigma = 2, \qquad t = \frac{u-1}{v},$$

d'où l'on tire

$$u^2 + v^2 - 1 = 0.$$

C'est en somme l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée; en prenant la droite (aa') sous la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

cette équation s'écrit

$$F \equiv (\alpha + \lambda\gamma)^2 + (\beta + \mu\gamma)^2 - \gamma^2 = 0.$$

On reconnaît une conique ayant son foyer à l'origine.

La directrice correspondante, obtenue en annulant F'_α et F'_β, correspond à $u = v = 0$. C'est la droite

$$(\Delta) \qquad \frac{1}{\rho} = \lambda \cos\theta + \mu \sin\theta$$

qui porte bien les points d'inflexion de la cubique (C); ces points d'inflexion correspondent en effet à

$$\cos 3\theta = 0$$

[d'après (4)] de sorte que le rayon vecteur de (C) s'y réduit au rayon vecteur de (Δ).

II, III et IV. La tangente en un point (a) de la courbe (C), définie par son angle polaire α, recoupe la courbe en un point b

d'angle polaire β tel que

$$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi. \tag{6}$$

Si l'on se donne le point b il lui correspond deux points a et a' ayant les angles polaires respectifs

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}, \qquad \frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$$

(angles polaires définis à $k\pi$ près). Les rayons Oa et Oa' sont rectangulaires de sorte que le lieu demandé dans la deuxième partie est constitué par la courbe C elle-même.

Les angles polaires des trois points a_1, a_2, a_3 où (A) rencontre (C) vérifiant la relation

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{\pi}{2}+k\pi, \tag{1'}$$

on a, pour les points correspondants des formules telles que (6), d'où, par addition,

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\frac{\pi}{2}+k'\pi,$$

de sorte que b_1, b_2, b_3 sont bien sur une droite (B).

La droite (B) étant donnée on connaît β_1, β_2, β_3 et, pour fixer les idées, nous prendrons pour ces angles des déterminations telles que

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=\frac{\pi}{2}. \tag{1''}$$

Les points correspondants a seront alors désignés par les notations $a_1\, a'_1$, $a_2\, a'_2$, $a_3\, a'_3$ et nous pourrons prendre, pour leurs angles polaires les déterminations

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_1&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_1}{2}, & \alpha'_1&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_1}{2}+\frac{\pi}{2},\\
\alpha_2&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_2}{2}, & \alpha'_2&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_2}{2}+\frac{\pi}{2},\\
\alpha_3&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_3}{2}, & \alpha'_3&=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta_3}{2}+\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

D'après (1') et (1'') il est évident que ces points se groupent sur quatre droites $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ qui correspondront ainsi à B. Les droites

$$\left.\begin{matrix}(A_1)\\(A_2)\\(A_3)\\(A_4)\end{matrix}\right\}\text{ joignant respectivement les points }\left\{\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a'_2 & a'_3\\ a'_1 & a_2 & a'_3\\ a'_1 & a'_2 & a_3\end{matrix}\right.$$

Pour que (A_1) et (A_2) soient confondues il faut que les points a'_2 et a_3, a_2 et a'_3 coïncident. D'après (7) on en tire immédiatement que β_2 et β_3 diffèrent de $(2k+1)\pi$; les points b_2 et b_3 coïncident et la droite (B) est tangente à la courbe C.

La droite (A_1) [ou (A_2)] qui joint les points a_3 et a'_3 (confondu avec a_2), tels que les rayons vecteurs soient rectangulaires, enveloppe la conique obtenue dans la question I. Le point a'_1 commun à (A_3) et (A_4) décrit la courbe (C).

V. Une des diagonales du quadrilatère joint les points a_1 [commun à (A_1) et (A_2)] et a'_1 (commun à A_3 et A_4). Les rayons vecteurs correspondants étant rectangulaires le cercle de diamètre $a_1 a'_1$ passera par l'origine. Il est élémentaire que les trois cercles de l'énoncé ont deux points communs : l'un de ces points O sera bien indépendant de la position de la droite (B).

Soit l'un des cercles en question (Γ), de diamètre aa' [nous supprimons les indices 1, 2 ou 3]; il dépend seulement de la position du point b qui est associé commun de a et a'. Il est clair qu'avant de répondre à la dernière question posée par l'énoncé il faut déterminer l'équation de ce cercle en fonction du paramètre β qui fixe la position de b.

L'équation polaire de (Γ) étant

$$\rho = 2m\cos\theta + 2n\sin\theta,$$

les points d'intersection de (Γ) et (C) sont déterminés par

$$(\cos 3\theta + \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta)(2m\cos\theta + 2n\sin\theta) = 1,$$

équation qui doit admettre les racines α et $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ (angles polaires de a et a'). Il est tout indiqué d'écrire cette équation en y faisant intervenir seulement les lignes des arcs 2θ et 4θ. On obtient

$$m[\cos 4\theta + (\lambda + 1)\cos 2\theta + \mu \sin 2\theta + \lambda] \\ + n[\sin 4\theta + (\lambda - 1)\sin 2\theta - \mu\cos 2\theta + \mu] = 1,$$

qui doit être vérifiée pour

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \beta;$$

où β, angle polaire de b, n'est déterminé qu'à $k\pi$ près. Cela fait deux conditions

$$-m(\cos 2\beta - \lambda) + n(\sin 2\beta + \mu) = 1,$$
$$m[(\lambda + 1)\sin\beta + \mu\cos\beta] + n[(\lambda - 1)\cos\beta - \mu\sin\beta] = 0$$

qui donnent m et n, coordonnées du centre du cercle, par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} m = r[(1 - \lambda)\cos\beta + \mu\sin\beta], \\ n = r[(\lambda + 1)\sin\beta + \mu\cos\beta] \end{cases}$$

avec

$$(9) \qquad \frac{1}{r} = -\cos 3\beta + \cos\beta(2\lambda + \mu^2 - \lambda^2) + 2\sin\beta.\mu(1 + \lambda).$$

Pour terminer la question tout calcul est superflu et il suffit d'interpréter les équations obtenues. Le point b' de coordonnées polaires r et β décrit une courbe (C′) analogue à la courbe (C) et qui peut s'en déduire par une symétrie de centre O et un changement des valeurs des constantes λ et μ. La condition pour que trois points de la courbe (C) soient en ligne droite ne fait pas intervenir les valeurs de λ et μ de sorte qu'à trois points de la courbe (C) alignés sur une droite (B) correspondent trois points de (C′) alignés sur une droite (B′).

Il faut ajouter que (C) et (C′) se correspondent dans une transformation ponctuelle de tout le plan pour laquelle l'angle polaire restant le même, les rayons vecteurs de deux points homologues b et b' sont liés par une relation

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho} + \lambda_1\cos\beta + \mu_1\sin\beta.$$

Cette correspondance change les droites en droites : c'est d'ailleurs une homologie. Enfin les formules (8) définissent une nouvelle homographie dans laquelle le centre b'' du cercle (Γ) correspond au point b' : les centres des trois cercles (Γ) sont donc, comme on le savait *a priori*, sur la droite (B'') homologue de (B).

La droite (B) tournant autour d'un point fixe p, les droites (B') et (B'') tournent autour des homologues p' et p''. Le lieu du second point d'intersection des trois cercles (Γ) sera donc le cercle de centre p'' passant par l'origine.

Le cas où λ et μ sont nuls est particulièrement simple, p' et p'' sont confondus et coïncident avec le symétrique de p par rapport à l'origine.

Il faut dire aussi un mot du cas particulier où, $\lambda^2 + \mu^2$ étant égal à l'unité, les seconds membres des équations (8) ne sont pas distincts; l'homographie que définissent ces formules est alors dégénérée et, quel que soit b, le centre b'' du cercle (Γ) est sur une droite fixe passant par l'origine. Le lecteur achèvera sans peine l'examen de ce cas.

Remarque. — Pour traiter les quatre premières parties du problème on aurait pu borner, au cas de λ et μ nuls, une homologie analogue à celle qui vient d'être envisagée permettant de passer à des valeurs quelconques de λ et μ. Pour λ et μ nuls la solution géométrique de la première question est infiniment simple.

Soient en effet q et q' les points déduits de a et a' en triplant l'angle polaire, sans changer le rayon vecteur. Ils appartiennent à la droite $x = 1$ et les rayons Oq et Oq' sont rectangulaires comme les rayons Oa et Oa'. Les triangles Oaa' et Oqq' sont égaux de sorte que la droite aa' enveloppe le cercle de centre O et de rayon 1.

Nous jugeons inutile d'insister ici sur les considérations géométriques, bien évidentes, qui se rapportent à la théorie générale des cubiques unicursales.