Questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__23_1>

QUESTIONS PROPOSÉES.

2483. On pose

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Démontrer que

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

A. Labrousse.

2484. Si l est la longueur d'une lemniscate, I le moment d'inertie de la courbe (supposée homogène et de densité linéaire égale à l'unité) par rapport à son point double, S l'aire limitée par la courbe, on a la relation

$$l\mathrm{I} = 4\pi \mathrm{S}^2.$$

A. Labrousse.

2485. On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^{2k}}},$$

n et k étant des entiers. Mettre $I_0, I_1, \ldots, I_{2k-1}$, sous forme de limites de produits et démontrer les relations

$$I_0 I_k = I_1 I_{k+1} = I_2 I_{k+2} = \ldots = I_{k-2} I_{2k-2} = \frac{2k}{\pi}.$$

A. Labrousse.

2486. Si le triangle XYZ est circonscrit au triangle X′Y′Z′ et lui est directement semblable :

1° L'orthocentre de X′Y′Z′ est le centre du cercle circonscrit à XYZ et les pieds des hauteurs de X′Y′Z′ sont les traces de ses côtés sur ceux du triangle des milieux des côtés de XYZ.

2° Le centre du cercle circonscrit à X′Y′Z′ est équidistant des orthocentres des deux triangles, et ce cercle est bitangent à la conique inscrite à XYZ, qui a pour foyers les deux orthocentres et pour cercle directeur le cercle circonscrit à XYZ. E. Bally.

2487. 1° Les orthocentres des divers triangles d'un quadrangle inscriptible à un cercle forment un nouveau quadrangle inscriptible dont les triangles ont pour orthocentres les sommets du premier. Les deux quadrangles sont symétriques par rapport à un point, qui est le symétrique du centre de l'un des cercles relativement au centre de gravité des sommets du quadrangle inscrit correspondant. Leurs huit sommets se décomposent de quatre façons en deux quadrangles inscriptibles tels que les triangles de chacun aient pour orthocentres les sommets de l'autre. Les centres des cercles égaux circonscrits aux huit quadrangles forment une seconde figure égale à la première, possédant le même centre de symétrie, et les centres des cercles circonscrits aux quadrangles de la seconde sont réciproquement les huit sommets de la première.

2° Les symétriques d'un point d'un cercle circonscrit à un quadrangle, par rapport aux six côtés de ce quadrangle, sont les six sommets d'un même quadrilatère, dont chaque côté passe en l'orthocentre de l'un des triangles du quadrangle. Chaque triangle du quadrilatère est semblable au triangle correspondant d'orthocentres qui lui est inscrit.

3° Inversement, étant donné un quadrilatère, les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles de ses côtés forment un quadrangle inscriptible à un cercle qui passe au point de concours des premiers. Les orthocentres des triangles de ce quadrangle sont respectivement situés sur les côtés du quadrilatère. E. Bally.

2488. Le *point principal* de la tangente en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements étant le point, situé sur cette tangente, où le cercle générateur qui passe au contact de la tangente et est égal au cercle inscrit à l'hypocycloïde touche ce cercle inscrit, on a cette propriété :

Les points principaux de quatre tangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements sont les orthocentres des quatre triangles qui ont pour sommets les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles ayant pour côtés ces tangentes. E. Bally.

2489. Il y a deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales inscrites à un triangle donné et dont les cercles inscrits aient un rayon donné. Leurs centres sont deux sommets opposés d'un losange qui a pour autres sommets l'orthocentre et le circumcentre du triangle. Leur rayon est au côté de ce losange comme le rayon du cercle circonscrit au triangle l'est à la diagonale des derniers sommets mentionnés du losange.

Sur chaque côté du triangle, les deux points principaux sont symétriques relativement au milieu de ce côté. Les deux tangentes à ces hypocycloïdes, qui ont leurs points principaux respectifs en deux points des cercles inscrits qui soient symétriques relativement au centre de symétrie de ces cercles, sont deux asymptotes d'une même hyperbole circonscrite au triangle, et leur angle est constant (*cf.* L. Bickart, *I. M.*, 1923, p. 78-79, n° 5280).

E. Bally.