NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAUCHEUX

# Sur une question concernant des suites de nombres incommensurables

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__237_0>

[11]

# SUR UNE QUESTION CONCERNANT DES SUITES DE NOMBRES INCOMMENSURABLES;

PAR FAUCHEUX.

Soient deux incommensurables positifs $\alpha$ et $\beta$; $[x]$ désignant la partie entière du nombre positif $x$, on forme les deux suites infinies

(A) $$[\alpha],\quad [2\alpha],\quad [3\alpha],\quad \ldots,$$
(B) $$[\beta],\quad [2\beta],\quad [3\beta],\quad \ldots.$$

Rechercher dans quels cas les nombres contenus dans les deux suites sont tous distincts. Telle est la question indiquée par M. Bricard (*N. A.*, 1926, p. 100).

La solution fournie par M. Bricard n'est pas la seule. Je me propose d'en donner une plus étendue et de faire voir en particulier qu'elle représente la solution générale si l'on suppose l'un des incommensurables plus petit que 2.

1. Les suites (A) et (B) ne devant pas comporter de répétitions, il est clair que $\alpha$ et $\beta$ sont tous deux supérieurs à 1. Je suppose $\alpha < \beta$ et j'examinerai d'abord le cas suivant :

$$1 < \alpha < 2.$$

Traçons deux axes de coordonnées rectangulaires et dans l'angle $xOy$ le réseau de carrés ayant pour sommets les points de coordonnées entières; soit R ce réseau. Traçons enfin la droite $D_\alpha$ issue de O et de coefficient angulaire $\alpha - 1$. Les nombres $[p\alpha]$ et $[(p+1)\alpha]$ sont consécutifs ou diffèrent de deux unités suivant qu'entre les abscisses $p$ et $p+1$ la droite $D_\alpha$ traverse ou ne traverse pas une horizontale de R. Pour simplifier, nous désignerons par $a+ib$ le point de coordonnées $a$ et $b$, et par $(r, s)$ le segment de droite joignant les points $r$ et $s$. Soient

$$(p_1 + i, p_1 + 1 + i);\quad (p_2 + 2i, p_2 + 1 + 2i);\quad \ldots;$$
$$(p_k + ki, p_k + 1 + ki);\quad \ldots;$$

les segments-unités des horizontales du réseau coupés par la droite $D_\alpha$. Les lacunes de (A) sont les nombres de la suite

$$(S) \qquad p_1 + 1, \quad p_2 + 2, \quad \ldots, \quad p_k + k, \quad \ldots.$$

Essayons tout d'abord de choisir $\beta$ de façon que (S) soit identique à (B).

Si l'on trace la droite $D_\beta$ partant de O et ayant pour coefficient angulaire $\beta - 1$, elle doit couper les segments verticaux

$$(1 + ip_1, \; 1 + ip_1 + i); \quad (2 + ip_2, \; 2 + ip_2 + i); \quad \ldots; \\ (k + ip_k, \; k + ip_k + i); \quad \ldots.$$

Or ces segments sont respectivement symétriques, par rapport à la bissectrice de l'angle $xOy$, des segments horizontaux coupés par la droite $D_\alpha$. Il existe donc une droite partant de O et les rencontrant tous; c'est l'isogonale de $D_\alpha$ par rapport à $Ox$ et $Oy$. Il n'existe d'ailleurs qu'une seule droite possédant cette propriété puisque les segments s'éloignent indéfiniment et conservent une longueur finie. On aboutit à la condition

$$(1) \qquad (\beta - 1)(\alpha - 1) = 1,$$

donnée sous une autre forme par M. Bricard. Il est d'ailleurs inutile d'y joindre la condition

$$1 < \alpha < 2,$$

car la relation (1) est symétrique par rapport à $\alpha$ et $\beta$ et implique que l'un de ces deux nombres est compris entre 1 et 2.

2. Si nous contractons les abscisses des segments verticaux énumérés tout à l'heure dans le rapport $\frac{1}{n}$ ($n$ entier positif), ceux qui conservent une abscisse entière sont ceux dont le rang est multiple de $n$; il existe une droite et une seule partant de O et les coupant tous; elle a pour coefficient angulaire $\frac{n}{\alpha - 1}$; si l'on choisit $\beta$ de façon que ce coefficient ait pour valeur $\beta - n$, les (B) sont tous des nombres extraits de (S) et l'on obtient alors la solution suivante du problème posé :

$$(\beta - n)(\alpha - 1) = n.$$

(B) est alors formé par les termes de (S) dont le rang est multiple de $n$.

La relation (2) nous fournit d'ailleurs toutes les solutions dans le cas de $\alpha$ compris entre 1 et 2. En effet, soit $\beta'$ une autre solution pour laquelle la suite (B) débuterait également par $p_n + n$. Traçons les droites D et D′ partant de O et ayant respectivement pour coefficients angulaires $\beta - n$ et $\beta' - n$. Ces deux droites percent l'abscisse 1 dans la même bande horizontale du réseau R. Par des considérations de similitude, on voit que D et D′ percent l'abscisse 2 dans la même bande horizontale ou dans deux bandes horizontales consécutives. C'est nécessairement dans la même bande; sinon $[2\beta]$ et $[2\beta']$ auraient pour valeurs deux entiers consécutifs, ce qui exigerait que deux termes consécutifs de (A) diffèrent de trois unités, ce qui est incompatible avec l'hypothèse primitive. Le même raisonnement prouverait que D et D′, perçant l'abscisse 2 dans la même bande horizontale, percent l'abscisse 3 dans les mêmes conditions. Ainsi de proche en proche, on verrait que les droites D et D′ partant d'un même point rencontrent un même segment-unité s'éloignant indéfiniment; les deux droites sont confondues et l'on a

$$\beta' = \beta.$$

3. Je reviens au cas général, et je partirai de la remarque suivante très simple :

Si l'on a formé la suite (A) relative à un incommensurable $\alpha$, la suite relative à l'un quelconque de ses multiples est formée uniquement de nombres contenus dans (A). Si donc on connaît une solution formée par les nombres $\alpha$ et $\beta$, on en obtient une autre en remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par un quelconque de leurs multiples. On obtiendra donc une solution en remplaçant dans la relation (1) $\alpha$ par $\frac{\alpha}{m}$ et $\beta$ par $\frac{\beta}{n}$, ce qui fournit

$$(\alpha - m)(\beta - m) = mn.$$

Le cas signalé par M. Bricard rentre dans cette formule en y faisant

$$m = n.$$