Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__219_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' + 13y = \sin 3x + 6e^{-2x}(\sin 3x + \cos 3x) - 6,$$

et l'on demande :

1° *Trouver l'intégrale générale ;*

2° *Trouver l'équation de la courbe intégrale particulière qui passe par l'origine des coordonnées et qui admet en ce point un point d'inflexion : soit $y = f(x)$ celle-ci;*

3° *Trouver la partie principale de $f(x)$, en prenant x comme infiniment petit principal, et en déduire la forme de l'intégrale particulière pour des valeurs petites de x.*

II. *On considère la courbe qui a pour équations*

$$x = R(t - \sin t),$$
$$y = R(1 - \cos t),$$
$$z = 4R \sin \frac{t}{2}$$

et l'on demande :

1° *Calculer le rayon de courbure, en fonction de t.*

2° *En chaque point de cette courbe, on porte sur la* normale principale, *dans le sens de la concavité, une longueur égale à*

$$R\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Trouver les équations de la courbe décrite par le point ainsi obtenu; forme de cette courbe.

Solution. — *Première question.*

1° L'intégrale générale de l'équation est.

$$y = [A \sin 3x + B \cos 3x + x(\sin 3x - \cos 3x)] e^{-2x}$$
$$+ \frac{1}{40}(\sin 3x - 3\cos 3x) - \frac{6}{13}.$$

2° L'intégrale particulière devant passer par O et admettre en ce point une inflexion, on aura $y_0 = y''_0 = 0$ pour $x = 0$. L'équation différentielle donne alors

$$4y'_0 = 6 - 6 = 0, \qquad \text{donc} \qquad y'_0 = 0.$$

L'intégrale cherchée sera donc tangente en O à Ox.

On en déduit :

$$B - \frac{3}{40} - \frac{6}{13} = 0,$$
$$3A - 1 - 2B + \frac{3}{40} = 0.$$

Donc

$$B = \frac{3}{40} + \frac{6}{13} = \frac{279}{520}, \qquad A = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} + \frac{4}{13} = \frac{1039}{1560}.$$

3° On sait que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Pour calculer y''', dérivons les deux membres de l'équation différentielle : on obtient

$$y'''_{(0)} = 3 - 12 + 18 = 9.$$

Donc

$$y = f(x) = \frac{9}{6} x^3 + \dots,$$

la partie principale est $\frac{3}{2} x^3$, d'où la forme.

Deuxième question.

1° $$x = R(t - \sin t), \qquad y = R(1 - \cos t), \qquad z = 4R \sin \frac{t}{2},$$

$$dx = R(1 - \cos t)\, dt, \qquad dy = R \sin t\, dt, \qquad dz = 2R \cos \frac{t}{2}\, dt,$$

d'où

$$ds = 2R\, dt.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1 - \cos t}{2}, \qquad \beta = \frac{\sin t}{2}, \qquad \gamma = \cos \frac{t}{2},$$

$$d\alpha = \frac{\sin t}{2}\, dt, \qquad d\beta = \frac{\cos t}{2}\, dt, \qquad d\gamma = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}\, dt,$$

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt,$$

d'où

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{4R}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

2° Les cosinus de la normale principale sont :

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \qquad \beta' = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}, \qquad \gamma' = \frac{-\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

Les équations du lieu cherché sont donc :

$$X = x + \alpha' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = Rt,$$

$$Y = y + \beta' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = R,$$

$$Z = z + \gamma' R \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} = 3R \sin \frac{t}{2}.$$

C'est une courbe plane [plan $y = R$], dont la projection sur le plan XOZ a pour équation

$$Z = 3\,R \sin \frac{X}{2R} \qquad \text{(sinusoïde).}$$

Épreuve pratique. — I. *Calculer la valeur numérique de l'intégrale définie*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5 + 4}}$$

avec une erreur absolue inférieure à $\frac{1}{2000}$.

On donnera le résultat avec 3 *décimales.*

(Nota. — *Cette intégrale se calcule par un développement en série.*)

II. *Une surface plane, représentée sur la figure, a la forme d'un rectangle dont on a supprimé les portions intérieures à deux cercles des centres* K *et* K'.

[*La figure montre les deux cercles symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle* OE, *le cercle* K *coupe un côté du rectangle* AD *parallèle à* OE *en deux points* B *et* C (*marquer* ABCD *dans le sens* OE), *enfin la droite* KK' *coupe* OE *en un point* H.]

On donne

$$OA = a, \qquad AB = b, \qquad BC = \sqrt{2}\,r, \qquad CD = c, \qquad KC = r,$$
$$KH = a + r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1° *Centre de gravité de cette surface plane;*

2° *Moment d'inertie par rapport à l'axe* OE (*densité* = 1);

3° *Volume engendré par cette surface en tournant autour de* OE.

Solution. — *Première question.*

On a :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(1 + \frac{x^5}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{x^5}{4} + \ldots + \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}+p-1\right)\left(\frac{x^5}{4}\right)^p + \ldots\right\};$$

en intégrant entre 0 et 1

$$I = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{4\times 6} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^p}{p!}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}+p-1\right)\frac{1}{4^p(5p+1)} + \ldots\right].$$

Désignons par a le nombre $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ et par b la série; $\mathcal{E}_x$ désigne l'erreur absolue commise sur x. On a

$$\mathcal{E}_{\mathrm{I}} = b\,\mathcal{E}_a + a\,\mathcal{E}_b,$$

il faut

$$b\,\mathcal{E}_a + a\,\mathcal{E}_b < \frac{1}{2000}.$$

Or on sait que $a < \frac{1}{2}$ et $b < 1$ visiblement.

On prendra

$$\mathcal{E}_a < \frac{1}{4000}, \qquad \mathcal{E}_b < \frac{1}{1000};$$

ces calculs sont classiques et faciles. On trouve

$$\mathrm{I} = 0{,}622,$$

la somme des erreurs commises (y compris celle qui provient de la suppression des décimales après la troisième) étant inférieure à $\frac{1}{2000}$.

Deuxième question.

L'angle $\widehat{\mathrm{HKC}}$ est égal à $45°$. La surface des segments échancrés est donc égale à $r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

1° En appelant z l'abscisse du centre de gravité cherché sur $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, le théorème des moments par rapport à OA donne, en posant $h = \mathrm{AD} = b + c + r\sqrt{2}$

$$z\left[2ah = 2r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}h \times 2ah - 2r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(b + r\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

d'où l'on tire z.

2° On calcule le moment d'inertie du rectangle complet $\left(\frac{2}{3}a^3 h\right)$ et l'on retranche le moment d'inertie des deux segments échancrés. On trouve

$$\mathrm{I} = \frac{2}{3}a^3\left(b + c + r\sqrt{2}\right) - 2r^4\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{7}{12}\right)$$
$$-4ar^3\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{5}{12}\right) - 4a^2r^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right).$$

3° Le volume engendré est égal à celui qu'engendre le rectangle complet $(\pi a^2 h)$ diminué de celui qu'engendrent les segments échancrés.

$$\mathrm{V} = \pi a^2 h - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\pi xy\,dx.$$

On trouve

$$V = \pi a^2 h - \pi a r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \pi r^3 \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{6}\right).$$

(Grenoble, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. (*Analyse et Géométrie*). — C. 58. — I. *On considère l'équation différentielle linéaire*

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^2(1+x)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Montrer qu'on peut trouver un changement de variable $x = \varphi(t)$, *tel que la nouvelle équation différentielle reliant* y *à* t *soit à coefficients constants.*

En déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

C. 59. — II. *Calculer l'intégrale*

$$\theta = \int_a^r \sqrt{\frac{4a^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \frac{dr}{2r}.$$

(*On ne cherchera pas à calculer* θ *en fonction explicite de* r, *mais simplement à avoir* r *et* θ *en fonction d'un paramètre.*)

III. *Deux points* M *et* M′ *se déplacent sur le cerle* $x^2 + y^2 = a^2$, *avec des vitesses angulaires respectivement égales à* $+3$ *et* -1. *Ils partent simultanément du point* $x = a$, $y = 0$.

Trouver et construire l'enveloppe de la droite qui les joint.

Montrer que si dans le problème précédent on regarde r *et* θ *comme les coordonnées polaires d'un point, les relations paramétriques trouvées représentent la même courbe que l'enveloppe ci-dessus.*

(Strasbourg, juin 1922.)