

## Certificat de géométrie supérieure

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 217-219

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_217\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__217_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.**

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Soit la surface réglée unicursale  $S$  (axes rectangulaires ou non)

(S)  $x = t, \quad y = t^2 + u, \quad z = t^3 + 3ut.$

*Expliquer sans calcul que la cubique  $u = 0$  est une asymptotique.*

Équation de S. Vérifier que, quel que soit  $a$ , la transformation

$$X = x, \quad Y = y + a, \quad Z = z + 3ax,$$

transforme S en elle-même. En déduire sans calcul que les cubiques  $u = \text{const.}$  sont asymptotiques.

2° Les plans osculateurs de la cubique  $u = 0$  coupent S suivant une génératrice et une parabole C :  $t_0$  étant le paramètre du point d'osculation, trouver la relation liant  $u$  et  $t$  le long de C. En chaque point de S passent deux paraboles C : elles forment un système conjugué.

Quelle est leur enveloppe ?

3° S peut être représentée par les équations

$$x = \frac{t_0 + t_1}{2}, \quad y = \frac{t_0^2 + t_1^2 + 4t_0t_1}{6}, \quad z = \frac{t_0t_1(t_0 + t_1)}{2}.$$

Le système  $(t_0, t_1)$  est conjugué. Enveloppe des courbes  $t_0$ , ou  $t_1$  : la déterminer sans calcul. Équation aux dérivées partielles relative à ce système.

4° Soit sur S une famille de courbes définie par l'équation

$$f\left(u, t, \frac{dt}{du}\right) = 0.$$

Comment obtient-on l'équation différentielle des courbes conjuguées.

5° On pose

$$t = \theta_1 + \theta_2, \quad u = (\theta_1 - \theta_2)^2.$$

Définir les courbes  $\theta_1, \theta_2$ . En déduire que la surface possède  $\infty^1$  modes de génération comme surface de translation.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° La surface S est une surface du troisième ordre, dite surface de Cayley.

La génératrice rectiligne

$$t = \text{const.}$$

est contenue dans le plan osculateur de la cubique  $u = 0$  au point correspondant. Ce plan étant ainsi tangent à la surface, la cubique est une asymptotique.

La transformation indiquée équivaut à la transformation

$$(1) \quad v = u + a.$$

Les cubiques  $v = 0$  sont des asymptotiques, comme transformées homographiques de la cubique  $u = 0$ .

2° La parabole C, correspondant au point d'osculation  $t = t_0$ , est définie par l'équation

$$(2) \quad (t - t_0)^2 + 3u = 0.$$

Les deux paraboles qui passent par un point vérifient évidemment

l'équation

$$(3) \quad du \delta t + dt \delta u = 0$$

des lignes conjuguées. L'enveloppe des paraboles C est la cubique  $u = 0$ .

3° Les courbes  $t_0$  et  $t_1$  ne sont autres que les paraboles C, d'où les propriétés indiquées. L'équation aux dérivées partielles, relative à ce système de lignes conjuguées, est

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t_0 \partial t_1} \frac{t_0 - t_1}{2} + \frac{\partial \omega}{\partial t_0} - \frac{\partial \omega}{\partial t_1} = 0.$$

4° L'équation différentielle demandée est

$$f\left(u, t, -\frac{dt}{du}\right) = 0,$$

d'après l'équation (3).

5° Le changement de coordonnées indiqué donne

$$x = \theta_1 + \theta_2, \quad y = 2(\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad z = 4(\theta_1^3 + \theta_2^3).$$

Si l'on rapproche ce résultat du n° 1, il est évident que la surface admet  $\infty^1$  modes de génération comme surface de translation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 58. — 1° On considère la surface ( $m, m_1, \mu$  constantes;  $t$  et  $t_1$  paramètres curvilignes)

$$\begin{aligned} x &= \mu(t^3 + 3mt^5) + \frac{1}{\mu}(t_1^3 + 3m_1t_1^5), \\ y &= (1 - \mu^2 t^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{\mu^2} + \frac{2m}{\mu^4} + \frac{3m}{\mu^2} t^2 \right], \\ z &= \left(1 - \frac{t_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} [\mu^2 + 2m_1\mu^4 + 3m_1\mu^2 t_1^2]. \end{aligned}$$

Former son  $ds^2$  : il est indépendant de  $\mu$ .

2° Intégrer l'équation différentielle des asymptotiques.

3° Courbure totale de la surface. Courbure moyenne.

(Lille, octobre 1925.)