JOSEPH PÉRÈS

Sur un système de vecteurs complexes et son application à l'étude de la configuration de Morley-Petersen

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 193-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__193_0>

SUR UN SYSTÈME DE VECTEURS COMPLEXES ET SON APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA CONFIGURATION DE MORLEY-PETERSEN;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

1. Dans son *Introduction géométrique à la Mécanique rationnelle* (¹), Charles Cailler utilise, après Study (²) et plusieurs autres auteurs, des quantités complexes dans lesquelles l'unité complexe ε est définie par la condition

$$\varepsilon^2 = 0. \tag{1}$$

Il en tire, en particulier, une élégante identification de la Géométrie réglée et de la Géométrie ponctuelle sur une sphère.

En se plaçant à ce point de vue (qui est d'ailleurs celui de Petersen), on rattache à des propriétés plus simples l'intéressante configuration de Morley-Petersen, envisagée, ici même, par M. Bricard (³). En revenant ici sur ce sujet, nous aurons l'occasion de donner au lecteur une idée, sommaire bien que pratiquement suffisante, de l'emploi géométrique des nombres complexes du type en question : il faut surtout en retenir une extension du champ de la théorie des vecteurs, extension si évidente qu'il serait fastidieux d'en donner le développement systématique et qu'il suffit d'envisager quelques propriétés simples.

2. Notons d'abord que des quantités complexes de la forme

$$a + b\varepsilon,$$

où l'unité complexe vérifie la condition (1), obéissent aux règles du calcul algébrique en ce qui concerne les trois premières opérations. Tout se passe comme si ε était une variable petite, dont on négligerait le carré et l'on voit que l'introduction de telles quan-

(¹) Publiée par H. Fehr et R. Wavre; Gauthier-Villars et Georg, éditeurs.
(²) *Geometrie der dynamen.*
(³) *N. A.*, 5ᵉ série. t. II, 1923-24, p. 41.

tités dans l'enseignement classique ne peut prêter à nulle objection.

Pour la division, il faut faire un peu attention : le résultat de l'opération n'est unique et bien déterminé que si le diviseur a sa partie réelle différente du zéro. C'est le seul cas qui ait quelque intérêt pour la suite et nous nous dispensons d'insister davantage sur des propriétés très évidentes.

3. Prenons des axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ et soit un torseur T, non réduit à un couple. Soient XYZ, LMN les composantes de la résultante et du moment à l'origine de ce torseur. Nous identifierons le torseur T avec un *vecteur-complexe* ayant pour composantes sur les axes les quantités complexes

$$\xi = X + \varepsilon L, \qquad \eta = Y + \varepsilon M, \qquad \zeta = Z + \varepsilon N.$$

Le torseur sera donc désigné par $\vec{T}$, avec la flèche qui distingue les vecteurs et, dans toute la suite, les termes de *torseur* et *vecteur-complexe* seront synonymes.

Tous les concepts fondamentaux de la théorie des vecteurs se généralisent immédiatement. Soit d'abord le torseur (ou vecteur-complexe) $\lambda\vec{T}$ déduit du premier en multipliant les composantes par le scalaire complexe $\lambda = l + m\varepsilon$; la direction de la résultante n'est pas modifiée et au moment multiplié par un scalaire vient s'ajouter un vecteur parallèle à cette résultante, de sorte que $\vec{T}$ et $\lambda\vec{T}$ ont le même axe central. Si donc nous définissons une droite de l'espace par un torseur dont elle soit le support (ou axe central), ce torseur ne sera déterminé qu'à un facteur près (*scalaire complexe*). Pour définir ainsi une droite, on peut toujours choisir un torseur réduit à un vecteur unique; les composantes ξ, η, ζ condensent alors les coordonnées plückériennes de la droite. Ces composantes seront réelles dans le seul cas où la droite considérée passe par l'origine.

Le carré de la longueur de T sera

$$T^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\varepsilon(LX + MY + NZ),$$

d'où

$$|T| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} + \varepsilon \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

où apparaît la longueur de la résultante et l'automoment.

En particulier le torseur $\frac{1}{|T|}\vec{T}$ aura la longueur unité (il est réduit à un vecteur unique) et définira les cosinus directeurs de la droite-support. Les droites passant par l'origine auront des cosinus directeurs réels; pour les autres droites ils seront complexes.

4. Le produit géométrique $\vec{T} \times \vec{T}_1$ sera défini par

$$\begin{aligned}\vec{T} \times \vec{T}_1 &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 \\ &= XX_1 + YY_1 + ZZ_1 + \varepsilon(XL_1 + YM_1 + ZN_1 + X_1L + Y_1M + Z_1N)\end{aligned}$$

invariant où figure (coefficient de ε) le moment relatif des deux torseurs. Il est immédiat que ce produit s'annule dans le seul cas où les supports des deux torseurs sout *concourants* et *rectangulaires*.

Notons enfin que, λ et λ_1 étant deux scalaires complexes,

$$\vec{T}' = \lambda\vec{T} + \lambda_1\vec{T}_1$$

représente n'importe quel torseur dont l'axe rencontre, à angle droit, les axes de $\vec{T}$ et $\vec{T}_1$. On s'en rend compte en remarquant que tout torseur $\vec{\mathfrak{T}}$, porté par la perpendiculaire commune aux axes de $\vec{T}$ et $\vec{T}_1$, donne un produit géométrique nul avec T et T_1 donc aussi avec T'.

5. Les remarques précédentes permettent d'étendre à la géométrie réglée générale tous résultats concernant des droites concourantes en un point O. Celles-ci étant définies par des vecteurs réels, les autres par des vecteurs complexes, les calculs faits dans le premier cas s'appliquent immédiatement au second. Pour généraliser les résultats, il suffit de noter qu'aux droites passant par O et situées dans un plan correspondent des droites qui ont une même perpendiculaire commune. A la perpendiculaire commune à deux droites passant par O correspond la perpendiculaire commune à deux droites quelconques.

Ceci posé, soit un trièdre formé par les trois droites A, B, C. Il est élémentaire que les trois plans passant par chacune des arêtes et normaux au plan des deux autres, se coupent suivant une même droite. Cet énoncé se généralisera évidemment au cas de trois droites non concourantes quelconques A, B, C, et l'on retrouve précisément la configuration de Morley-Petersen. On est en effet conduit à l'énoncé suivant :

Soient A', B', C' les perpendiculaires communes aux droites A, B, C prises deux à deux et enfin A'', B'', C'' les perpendiculaires communes aux couples AA', BB', CC' : ces trois dernières droites coupent à angle droit une même droite D.

Voici d'ailleurs une démonstration rapide qui, n'utilisant que la notion de produit géométrique, s'applique sans modification aussi bien au cas de A, B, C concourantes qu'au cas général.

Nous déterminons les droites par des torseurs (ou vecteurs-complexes) $\vec{A}$ pour la droite A, etc. Il suffit d'établir une relation linéaire et homogène, à coefficients complexes entre $\vec{A}''$, $\vec{B}''$ et $\vec{C}''$. Or A'' rencontre à angle droit la perpendiculaire commune A' à B et C; donc

$$\vec{A}'' = \lambda \vec{B} + \mu \vec{C}.$$

De plus $\vec{A}'' \times \vec{A}$ doit être nul, ce que l'on vérifie en prenant

$$\lambda = \vec{A} \times \vec{C}, \qquad \mu = - \vec{A} \times \vec{B}.$$

Donc

$$\vec{A}'' = \vec{B}\,(\vec{A} \times \vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A} \times \vec{B}),$$
$$\vec{B}'' = \vec{C}\,(\vec{B} \times \vec{A}) - \vec{A}\,(\vec{B} \times \vec{C}),$$
$$\vec{C}'' = \vec{A}\,(\vec{C} \times \vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{C} \times \vec{A}),$$

et il en résulte

$$\vec{A}'' + \vec{B}'' + \vec{C}'' = 0,$$

ce qui établit l'existence de la configuration de Morley-Petersen.

6. On rattachera aussi à des propriétés connues du trièdre les résultats sur les *bissectrices* de trois droites orientées quelconques qu'utilise M. Bricard dans son élégante démonstration du Théorème de Morley-Petersen.

On constate d'abord que, dans l'ordre d'idées qui nous occupe, il faut définir les bissectrices de deux droites orientées quelconques comme le fait M. Bricard. A et B étant ces deux droites on mène les parallèles (de même orientation) par le milieu i de leur perpendiculaire commune et les bissectrices, au sens ordinaire du mot, intérieures ou extérieures des deux droites seront encore dites bissectrices de A et B.

Nous pouvons nous borner à rappeler les énoncés de M. Bricard : A, B, C étant trois droites orientées quelconques, LMN, L′M′N′ les bissectrices, intérieures ou extérieures, de ces droites prises deux à deux; L′, M′, N′ ont une même perpendiculaire commune. De même L′, M, N, etc. On peut d'ailleurs ajouter la propriété suivante : les perpendiculaires communes aux couples AL, BM, CN coupent à angle droit une même droite; de même en remplaçant LMN par L′M′N, etc.

7. Sans insister sur d'autres applications des considérations précédentes [1], nous dirons quelques mots de l'interprétation géométrique d'une substitution orthogonale à coefficients complexes.

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les torseurs unitaires (simples vecteurs) portés par les axes Ox, Oy, Oz respectivement. On a évidemment

$$T = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}.$$

Prenons de nouveaux axes rectangulaires $O'x'y'z'$ définis par $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$; on aura pour les composantes complexes $\xi'\eta'\zeta'$ de $\vec{T}$ sur ces axes

$$\vec{T} = \xi' \vec{i'} + \eta' \vec{j'} + \zeta' \vec{k'}.$$

Or les composantes de $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ sur les premiers axes sont les cosinus directeurs, en général complexes, des arêtes du nouveau trièdre par rapport à $Oxyz$. On passera donc des $\xi\eta\zeta$ aux $\xi'\eta'\zeta'$ par une substitution orthogonale à coefficients complexes. Ainsi une telle substitution, effectuée sur les composantes complexes des torseurs équivaut à un changement (d'ailleurs quelconque) du système de référence rectangulaire.

Ce résultat peut aussi se déduire du fait que T^2 (*cf.* n° 5) a une signification indépendante des axes choisis.

---

(1) Cf., *Comptes rendus*, 15 mars 1926, p. 680.