# Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 179-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__179_0>

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. *Les axes Oxyz étant rectangulaires, on projette chaque point* M *de l'espace en* $m$ *sur le plan* $xOy$, *en* $\mu$ *sur* $Oz$ *et l'on considère la droite* $\mu m$.

*Trouver les surfaces* S *telles que le plan tangent en un point quelconque* M *de cette surface soit parallèle à la droite* $m\mu$ *correspondante. Équation* E *de ces surfaces.*

2. *Former les équations des caractéristiques sans tenir compte de ce fait que l'équation* E *obtenue est linéaire; intégrer complètement le système différentiel obtenu.*

*Montrer qu'il existe des surfaces développables à deux paramètres, solutions de* E, *et les déterminer.*

3. *Déterminer* directement *la méridienne des surfaces de révolution, solutions de* E (*utiliser la propriété géométrique de définition, n°* 1).

4. *Soit une surface* S quelconque *solution de* E; *on la fait tourner autour de* $Oz$; *montrer qu'elle reste solution : que peut-on dire de la surface* $\Sigma$ *enveloppe de* S *dans ce mouvement?*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'équation E est

$$px + qy + z = 0, \tag{1}$$

admettant pour intégrale générale

$$zx = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Les $\infty^1$ hyperboles équilatères d'équation

$$zx = C, \tag{3}$$

dans le plan $zOx$, se transforment par une rotation autour de $Oz$ en $\infty^2$ hyperboles, parmi lesquelles on prélève, suivant une loi arbitraire, une famille $\infty^1$ pour former la surface intégrale générale.

On obtient, en particulier, les surfaces de révolution

$$z\sqrt{x^2+y^2} = C, \tag{4}$$

et les surfaces (cylindres hyperboliques)

$$z(ax+by) = 1, \tag{5}$$

qui sont les surfaces développables demandées par l'énoncé. D'ailleurs, si l'on exprime que les surfaces (2) sont développables on trouve la condition

$$ff'' - 2f'^2 = 0,$$

d'où les cylindres (5).

Le système complet des équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = \frac{dp}{-2p} = \frac{dq}{-2q}$$

donne la combinaison intégrable

$$\frac{p}{q} = \text{const.},$$

qui conduit manifestement à une développable.

Toute surface intégrale reste évidemment surface intégrale par une rotation autour de O$z$. C'est un résultat classique qu'une enveloppe d'intégrales est elle-même intégrale. L'enveloppe obtenue ici est manifestement de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Intégrer*

$$x^2(y' + y^2) + xy + 1 = 0.$$

*Remarquer que l'équation admet des intégrales de la forme* $\frac{A}{x}$ (A const.), *ou poser*

$$y = \frac{z'}{z}.$$

*Exprimer l'intégrale réelle par formules débarrassées de tout symbole imaginaire.*

II. *Chercher les asymptotiques de la surface*

$$x = 3u + 3v, \qquad y = 3u^2 + 3v^2, \qquad z = 2u^3 + 2v^3.$$

*L'asymptotique* $u = v$ *est une hélice. La surface est réglée. Montrer que la surface est le lieu des milieux des sécantes doubles d'une asymptotique* gauche *quelconque.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation donnée admet évidemment $\frac{\pm i}{x}$ pour intégrales particulières. Les procédés réguliers, indiqués par l'énoncé, conduisent aisément au résultat, surtout le second, consistant à poser

$$y = \frac{z'}{z}.$$

Un autre procédé simple consiste à prendre pour inconnue

$$Y = xy,$$

de sorte que

$$Y = \pm i$$

est solution de l'équation de Riccati en Y. On trouve

$$xY' + Y^2 + 1 = 0,$$

qui s'intègre aussitôt en séparant les variables.

II. La surface proposée est la surface bien connue du troisième degré de Cayley, qui est surface de translation de $\infty^1$ modes différents. L'équation des asymptotiques est

$$du = \pm dv.$$

Les génératrices rectilignes sont les asymptotiques

$$u + v = \text{const}.$$

(Lille, novembre 1925.)

C.55. — Épreuve théorique. — 1° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* $u = \text{const.}$ *et* $v = \text{const.}$ *tracées sur la surface* (S) *représentée par*

$$x = v\cos u - a\sin u, \qquad y = v\sin u + a\cos u, \qquad z = au,$$

*$a$ est une constante positive.*

2° *Asymptotiques de* (S).

3° *Montrer que les surfaces*

$$\text{(H)} \qquad 4x^2 + 4y^2 = (z+c)^2 + 4a^2,$$

*où $c$ est une constante arbitraire, coupent* (S) *suivant une famille d'asymptotiques.*

4° *Trouver les surfaces* ($\Sigma$) *qui coupent orthogonalement les surfaces* (H).

5° *Indiquer la forme des sections de* ($\Sigma$) *par le plan* $y = 0$.

6° *Montrer qu'il existe entre les rayons de courbure principaux en un point* M *de* (S) *une relation qui ne dépend pas des coordonnées de* M.

Épreuve pratique. — I. *Calculer les rayons de courbure et de torsion, de la courbe gauche définie par les équations*

$$y = a\,\text{ch}\frac{x}{a}, \qquad z = ha\,\text{sh}\frac{x}{a},$$

*$a$ et $h$ désignant des constantes.*

II. *Calculer par la méthode des résidus l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}\,dx}{(1+x^2)^3} \qquad (i=\sqrt{-1},\ m>0)$$

*prise le long de l'axe des quantités réelles.*

*En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx\,dx}{(1+x^2)^3}.$$

III. *Décomposer en éléments simples la fonction elliptique*

$$f(u)=\frac{1}{p(2u)-pu},$$

*pu étant la fonction elliptique de Weierstrass construite avec les périodes* $2\omega$ *et* $2\omega'$.

(Lyon, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée* (S) *engendrée par la droite* (D) *qui a pour équations*

$$x=uz+\mathrm{U}, \qquad y=(au+b)z+\mathrm{U}_1,$$

*a et b étant des constantes,* U *et* $\mathrm{U}_1$ *des fonctions du paramètre u.*

1° *Sur la projection orthogonale* ($\Delta$) *de* (D) *sur le plan* $x\mathrm{O}z$ *on prend le point* A *de coordonnées*

$$x=uf(u)+\mathrm{U}, \qquad y=0, \qquad z=f(u).$$

*Déterminer la fonction* $f(u)$ *de façon que le point* A *décrive une trajectoire orthogonale de* ($\Delta$);

2° *Déterminer les fonctions* U *et* $\mathrm{U}_1$ *de façon que les lignes asymptotiques non rectilignes de* (S) *se projettent orthogonalement sur le plan* $x\mathrm{O}z$ *suivant les trajectoires orthogonales de* ($\Delta$). *Quelle est alors la nature de la surface* (S)? *Que sont alors les trajectoires orthogonales de* ($\Delta$)?

II. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{e^z(2-z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{L}(z^2-1)\,dz$$

*prise le long d'une circonférence* (C) *ayant pour centre l'origine, un rayon égal à* $\sqrt{2}$ *et à partir du point* $z=\sqrt{2}$ *la détermination initiale de* L $(z^2-1)$ *étant zéro.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° $f(u)$ doit vérifier l'équation

$$f'(u)+\frac{u}{u^2+1}f(u)+\frac{u\mathrm{U}'}{u^2+1}=0,$$

facile à intégrer explicitement.

2° Identifiant avec la précédente l'équation qui donne $z$ en fonction de $u$ pour les asymptotiques on obtient

$$\mathrm{U}''=0,\qquad \mathrm{U}'_1-a\mathrm{U}'=\frac{\lambda}{u^2+1}\qquad (\lambda \text{ const.}),$$

équations qui donnent U et $\mathrm{U}_1$; par changement convenable d'origine on voit que S est un conoïde dont l'axe est perpendiculaire à $x\mathrm{O}z$. De là résulte que les $\Delta$ sont concourantes et que les projections des lignes asymptotiques sont des cercles concentriques.

II. Une intégration par parties conduit à une nouvelle intégrale sans logarithme calculable par application régulière du théorème classique des résidus.

EPREUVE PRATIQUE. — *On donne, en coordonnées rectangulaires, un point* S *de coordonnées* $x=0$, $y=0$, $z=a$ *et une parabole ayant pour équations*

$$y^2-2ax=0,\qquad z=0.$$

*On considère le cône* (C) *qui a pour sommet* S *et pour directrice la parabole et d'autre part la sphère* ($\Sigma$) *ayant pour équation*

$$x^2+y^2+z^2-az=0.$$

*On demande de calculer :* 1° *l'aire de la surface du cône intérieure à la sphère;* 2° *l'aire de la surface de la sphère intérieure au cône.*

Nota. — *Pour la première partie on pourra exprimer les coordonnées d'un point du cône à l'aide des deux paramètres $u$, $v$ définis par*

$$x=u,\qquad \frac{y}{x}=v.$$

*Pour la deuxième partie, si* P *est un point de la sphère, la droite* SP *rencontre le plan* $x\mathrm{O}y$ *en un point de coordonnées* $\xi$, $\eta$, 0 *et l'on exprimera les coordonnées de* P *en fonction de* $\xi$, $\eta$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Le calcul des deux intégrales doubles par les procédés classiques ordinaires ne présente aucune difficulté et donne comme résultats

$$\frac{3\pi a^2\sqrt{2}}{16},\qquad \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}.$$

(Bordeaux, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne les équations paramétriques suivantes d'une surface* (S)

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u, v).$$

1° *Déterminer la fonction* $f(u, v)$ *de façon que les courbes* $u =$ const. *et* $v =$ const. *forment deux systèmes conjugués de la surface* (S).

2° *Déterminer la fonction* $f(u, v)$ *de telle sorte que le point* P *de rencontre avec* O$z$ *du plan tangent à la surface en un point* $u = u_0$, $v = v_0$ *reste le même si* $v_0$ *varie,* $u_0$ *restant fixe.*

*Expliquer géométriquement pourquoi dans ces deux cas on trouve la même expression pour* $f(u, v)$.

3° *Déterminer* $f(u, v)$ *de façon que les courbes* $u =$ const. *soient toutes des courbes planes conjuguées des courbes* $v =$ const. *Quelle est alors l'équation cartésienne de la surface* (S) ? *Quelle définition géométrique peut-on en déduire pour cette surface en supposant les axes rectangulaires ?*

II. *On considère la différentielle totale à trois variables indépendantes*

$$(yz - y^3)\,dx + (xy^2 + zx)\,dy + \varphi(x, y)\,dz,$$

*déterminer la fonction* $\varphi(x, y)$ *des deux variables* $x$ *et* $y$ *de façon que la différentielle totale précédente soit complètement intégrable.*

*La fonction* $\varphi(x, y)$ *étant ainsi choisie, intégrer l'équation obtenue en égalant à zéro la différentielle totale.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les deux premières parties conduisent à la même équation

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}u = 0, \qquad f = u\mathrm{V} + \mathrm{U},$$

la coïncidence des deux résultats est une conséquence immédiate du théorème classique de M. Kœnigs sur les lignes conjuguées.

Pour la troisième partie, $f$ doit être de la forme précédente, V étant une fonction linéaire de $\sin v$ et $\cos v$. La surface est de la forme générale

$$x^2 + y^2 = \mathrm{F}(\mathrm{P}) \qquad (\mathrm{P} \text{ fonction linéaire de } x, y, z)$$

et elle est engendrée par l'ellipse variable

$$x^2 + y^2 = \mathrm{F}(\lambda), \qquad \mathrm{P} = \lambda,$$

dont la loi de variation est évidente.

II. Par un groupement évident de termes on peut, en posant $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, écrire la différentielle totale considérée sous la forme

$$z\,du + u^2\,dv + \varphi(u, v)\,dz,$$

la condition classique d'intégrabilité donne, puisque $\varphi$ est indépendant de $z$,

$$\varphi = Cu^2 - u;$$

l'équation aux différentielles totales à intégrer s'écrit alors

$$-\frac{u\,dz - z\,du}{u^2} + dv + C\,dz = 0$$

et son intégration est immédiate, elle donne

$$-\frac{z}{xy} + \frac{y}{x} + Cz = C'.$$

Épreuve pratique. — *Calculer (en utilisant la théorie des intégrales d'une variable complexe) l'intégrale réelle*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}}.$$

(Bordeaux, novembre 1925.)

Épreuve théorique. — *En un point* M *d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires* $Oxyz$, *on considère le plan tangent et la normale.*

*Le plan tangent coupe* $Oz$ *en* T. *Le point* M *se projette en* H *sur* $Oz$.

*La plus courte distance de* $Oz$ *et de la normale est* AB (A *sur* $Oz$, B *sur la normale*). *On construit* BC *parallèle à* $Oz$ *et égal à* AB *et, sur la normale, on prend* D *tel que* CD *soit parallèle au plan* $Oxy$.

*Étudier les surfaces telles que*

(1) $$\overline{TH} = \varphi(\overline{CD}),$$

$\varphi$ *étant une fonction arbitrairement donnée.*

1° *Écrire l'équation aux dérivées partielles* (1) *en coordonnées rectangulaires puis en coordonnées semi polaires.*

2° *En trouver, dans les deux systèmes de coordonnées, une intégrale complète. Intersections par des plans parallèles à* $Oxy$ *des surfaces représentées par cette intégrale complète.*

3° *Toujours dans les deux systèmes de coordonnées, former l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces* (1).

4° *Déterminer complètement les surfaces telles que* $\overline{TH} = \overline{CD}$.

Solution. — 1° On a très aisément

(2) $$\overline{TH} = px + qy, \qquad \overline{CD} = qx - py,$$

et l'équation (1) est, par suite,

(3) $$px + qy = \varphi(qx - py).$$

Les segments (2) sont susceptibles de signes mais ceci n'influe pas sur la structure générale de l'équation (3) tant que la fonction $\varphi$ n'est pas déterminée. En coordonnées semi-polaires, (3) prend la forme

$$r\frac{\partial z}{\partial r} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right). \tag{4}$$

2° Il est évidemment indiqué de commencer l'intégration sur (4). En posant

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = a, \qquad \text{on a} \qquad r\frac{\partial z}{\partial r} = \varphi(a),$$

d'où

$$z = a\theta + \varphi(a)\log r + c.$$

Ceci est une intégrale complète. Elle représente des hélicoïdes dont l'intersection par des plans de cote $z$ constante dans des spirales logarithmiques.

3° L'équation (3) constitue une *intégrale intermédiaire* pour l'équation de Monge-Ampère

$$(x^2+y^2)(rt-s^2)+(px-qy)(t-r)-2(py+qx)s-p^2-q^2=0.$$

De même (4) pour

$$r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \theta}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial z}{\partial r} + r\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right).$$

4° Ici il faut considérer la double équation

$$r\frac{\partial z}{\partial r} = \pm\frac{\partial z}{\partial \theta},$$

dont l'intégrale générale est

$$z = f(\theta \pm \log r).$$

Épreuve pratique. — *Le problème de l'épreuve théorique conduit à la considération des hélicoïdes*

$$z = a\theta + b\log r + c,$$

*où $a$, $b$, $c$ sont trois constantes et $r$, $\theta$, $z$ des coordonnées semi-polaires. On demande les lignes asymptotiques de ces hélicoïdes.*

Solution. — La surface

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z(r, \theta)$$

a ses lignes asymptotiques définies par l'équation différentielle

$$r\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}dr^2 + 2\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)dr\,d\theta + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}\right)d\theta^2 = 0.$$

Bien que ce ne soit pas indispensable pour le cas présent, c'est un excellent exercice que de former cette équation qui s'applique évidemment à une surface quelconque donnée en coordonnées semi-polaires. Pour les hélicoïdes indiqués elle se réduit à

$$br^2 d\theta^2 - 2ar\,dr\,d\theta - b\,dr^2 = 0.$$

Les variables sont immédiatement séparées et l'on a deux familles de spirales logarithmiques pour projection des asymptotiques sur le plan $z = 0$.

(Toulouse, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$x(cz - by)p + y(ax - cz)q = z(by - ax).$$

*Déterminer :*

1° *L'intégrale générale;*
2° *L'intégrale qui passe par la droite*

$$ax = by = cz;$$

3° *Le plan tangent à cette dernière surface au point*

$$x = \frac{k}{a}, \qquad y = \frac{k}{b}, \qquad z = \frac{k}{c}.$$

II. *Trouver les trajectoires orthogonales des cercles*

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = b + r\sin\theta;$$

*où $a$, $b$, $r$ sont fonctions du paramètre $u$, en déterminant $\theta$ en fonction de $u$.*

Application. — *Trouver les trajectoires orthogonales des cercles normaux à l'axe $Ox$ et à la parabole $y = x^2$ en un de leurs points d'intersection.*

M *étant ce point commun, on aura intérêt à employer comme paramètre $u$ l'angle de la tangente en* M *à la parabole avec* $Ox$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — III. *On donne l'équation*

$$(x + 1)y'' - 2y' - (x - 1)y = 2xe^{-x}.$$

*L'intégrer sachant que l'équation sans second membre admet une intégrale de la forme $e^{rx}$.*

Indications sur la solution. — I. Le système associé donne les intégrales premières

$$ax + by + cz = \alpha, \qquad xyz = \beta;$$

d'où l'intégrale générale

$$ax + by + cz = \varphi(xyz)$$

et l'intégrale particulière

$$(ax + by + cz)^3 = 27\,abcxyz.$$

C'est un cône, qui admet $ax = by = cz$ comme génératrice double.

II. La relation d'orthogonalité

$$\sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy = 0,$$
$$da \sin\theta - db \cos\theta - r\, d\theta = 0$$

donne, en posant $\tan\frac{\theta}{2} = v$,

$$a' \frac{2v}{1 + v^2} - b' \frac{1 - v^2}{1 + v^2} - \frac{2r}{1 + v^2} \frac{dv}{du} = 0,$$

c'est une équation de Riccati.

Dans le cas particulier et avec la notation indiquée,

$$a = \frac{x}{2}, \qquad b = 0, \qquad 2x = \tan u, \qquad r = \frac{x}{2\cos u} = \frac{\tan u}{4\cos^2 u}$$

et l'équation devient

$$v - \tan u \frac{dv}{du} = 0.$$

III. L'équation sans second membre admet l'intégrale

$$y = e^{+x}.$$

La substitution $y = ze^{+x}$ donne

$$(x + 1)z'' + 2xz' = 2xe^{-2x};$$

d'où l'intégrale générale demandée

$$y = e^{-x}(x + 1) + Ce^{-x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right).$$

(Besançon, juin 1925.)

Epreuve théorique. — I. *L'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2 - h)y = 0$$

*ne change pas quand on pose*

$$x = x_1 + k, \qquad y = e^{kx}y_1 \qquad (k \text{ const.}).$$

*Si l'on connaît une solution* $F(x)$, *on peut d'après ce qui précède en écrire une autre.*

*Obtient-on l'intégrale générale en ajoutant ces solutions respectivement multipliées par des constantes ?*

*Quelle est l'intégrale générale ?*

II. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$z + xp - x^2yq^2 - x^3pq = 0.$$

*Étudier la surface intégrale singulière.*

Épreuve pratique. — III. *On donne la surface* S,

$$x = u^2 + v, \qquad y = u^3 + uv, \qquad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2v.$$

1° *Déterminer le plan tangent.*

2° *Quelle relation existe entre le plan tangent au point* M *et le plan osculateur au même point* M *de la courbe* $v = 0$ ?

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de* S.

4° *Construire les projections sur* $xOy$ *des lignes asymptotiques passant par* $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4}{3}$.

Indications sur la solution. — I. Par la substitution donnée, l'équation donnée ne change pas. Ainsi à la solution $y = F(x)$ correspond

$$y = e^{kx}F(x - k).$$

Ces deux intégrales ne sont pas indépendantes si

$$\begin{vmatrix} F(x) & e^{kx}F(x-k) \\ F'(x) & e^{kx}F'(x-k) + ke^{kx}F(x-k) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{F'(x-k)}{F(x-k)} - (x-k) = \frac{F'(x)}{F(x)} - x = C, \qquad F(x) = e^{\frac{x^2}{2} + Cx}.$$

Des fonctions de cette forme satisfont à l'équation donnée

$$(C^2+1-h=0);$$

d'où l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}+\sqrt{h-1}\,x} + C_2 e^{\frac{x^2}{2}-\sqrt{h-1}\,x}.$$

II. Le système associé donne la combinaison

$$\frac{dx}{x}+\frac{dq}{q}=0, \qquad qx=a,$$

d'où l'intégrale complète

$$z=\frac{ay+b(ax-1)}{x}$$

et l'intégrale singulière

$$z=\frac{y}{x^2}.$$

III. 1° $$2u^2(3u^2+v)(X-x) \\ -4u(2u^2+v)(Y-y)+3(u^2+v)(Z-z)=0.$$

2° $$6u^4(X-x)-8u^3(Y-y)+3u^2(X-x)=0,$$

identique au plan tangent pour $v=0$.

3° $$(5u^2v+v^2)\,du^2-2u^3\,du\,dv=0;$$

$$v=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{C-\sqrt{u}}.$$

4° Ce sont la génératrice et la ligne asymptotique passant par

$$u=1, \qquad v=\frac{3}{2}.$$

(Besançon, octobre 1925.)