MARCEL VASSEUR

Solution de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 175-177
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__175_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2486.

(1925-1926, p. 24)

Si le triangle XYZ *est circonscrit au triangle* X'Y'Z' *et lui est directement semblable :*

1° *L'orthocentre de* X' Y' Z' *est le centre du cercle circonscrit à* XYZ *et les pieds des hauteurs de* X' Y' Z' *sont les traces de ses côtés sur ceux du triangle des milieux des côtés de* XYZ.

2° *Le centre du cercle circonscrit à* X'Y'Z' *est équidistant des orthocentres des deux triangles et ce cercle est bitangent à la conique inscrite à* XYZ, *qui a pour foyers les deux orthocentres et pour cercle directeur le cercle circonscrit à* XYZ. E. BALLY.

SOLUTION.

Par MARCEL VASSEUR.

En menant par X'Y'Z' les parallèles aux côtés opposés du triangle X'Y'Z', on obtient un triangle $X_1Y_1Z_1$ directement semblable au triangle X'Y'Z' ainsi qu'au triangle XYZ considéré dans l'énoncé (ou confondu avec ce dernier).

Les côtés homologues des triangles XYZ et $X_1Y_1Z_1$ se coupent en X'Y'Z' et l'on sait que les quadrilatères $XX_1Y'Z'$, $YY_1X'Z'$, $ZZ_1X'Y'$ sont inscriptibles et que les 3 circonférences circonscrites passent par un même point, pôle double des deux triangles envisagés et qui est son propre homologue dans chacun d'eux.

Soit H l'orthocentre du triangle $X'Y'Z'$, les 3 cercles envisagés plus haut ne sont autres que les cercles décrits sur HX_1, HY_1, HZ_1 comme diamètres ce qui démontre que H est le pôle double des 2 figures semblables formées par les triangles XYZ et $X_1Y_1Z_1$, donc ce point étant le centre du cercle circonscrit au triangle $X_1Y_1Z_1$ jouit également de cette propriété pour le triangle XYZ.

Il est, d'autre part, évident que les cercles décrits sur HX', HY', HZ' comme diamètres passent respectivement aux points d'intersection des côtés homologues $X'Y'$ et RS, $Y'Z'$ et ST, $X'Z'$ et RT; R, S, T étant les milieux des côtés de XYZ (un quelconque de ces cercles passant même par deux de ces points), ce qui démontre que ces points d'intersection sont bien les pieds des hauteurs du triangle $X'Y'Z'$.

2° Soient O_1 le centre du cercle circonscrit du triangle $X'Y'Z'$, et I_1 et I les orthocentres des triangles $X_1Y_1Z_1$ et XYZ, désignons encore par O le centre du cercle circonscrit au triangle RST; on sait que O_1 est au milieu de HI_1 et O au milieu de HI et d'autre part le triangle HII_1 est rectangle en I (comme HX_1X est rectangle en X). Il s'ensuit que l'on a

$$O_1H = O_1I = O_1I_1,$$

ce qui démontre la propriété demandée.

Nous rappellerons maintenant le théorème suivant :

Dans toute conique à centre, le rayon d'un cercle bitangent dont le centre est sur l'axe non focal est proportionnel à la distance de son centre aux foyers.

Pour l'établir, considérons une conique ayant pour foyers 2 points H et I, M un point de cette conique; les points de rencontre de la tangente et de la normale en M à la conique considérée avec l'axe non focal sont sur le cercle circonscrit au triangle MHI, soient K et L ces points d'intersection [1]. L'un d'eux K est tel que les segments MK et HI ont un point commun, l'autre L est tel que les segments HI et ML n'ont aucun point commun et les droites qui les portent se coupent sur leur prolongement.

Si la conique envisagée est une ellipse, ML est une tangente et K le centre d'un cercle bitangent en M et au point symétrique par rapport à LK; si c'est une hyperbole, le rôle des points L et K se permute.

En appliquant le théorème de Ptolémée, on a, en appelant $2c$ la distance focale et $2a$ l'axe focal :

$$(a) \qquad MK \times HI = HK \times MI + KI \times MH = HK(MI + MH)$$

ou

$$\frac{HK}{MK} = \frac{c}{a} \text{ (excentricité)},$$

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

ce qui démontre le théorème dans le cas de l'ellipse.

$$(b) \qquad \mathrm{LH} \times \mathrm{MI} = \mathrm{HI} \times \mathrm{ML} + \mathrm{MH} \times \mathrm{LI}$$

ou

$$\mathrm{HI} \times \mathrm{ML} = \mathrm{LH}\,(\mathrm{MI} - \mathrm{MH})$$

ou

$$\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{ML}} = \frac{c}{a}\ (\text{excentricité}),$$

ce qui démontre le théorème dans le cas de l'hyperbole.

L'application de ce théorème donne immédiatement la solution de la question posée, car à cause de la similitude des triangles et du rôle de H, on a :

$$\frac{\mathrm{O_1H}}{\mathrm{O_1X'}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OR}} = \text{excentricité de la conique}$$

et O_1 étant un point de l'axe non focal le théorème est démontré.