NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

# Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 156-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__156_0>

# CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une demi-sphère creuse de poids négligeable et de rayon* $r$ *est soudée à une demi-sphère pleine, homogène, de poids* P *et de même rayon. La sphère ainsi formée est mobile sans frottement sur un plan incliné faisant l'angle* $\alpha$ *avec l'horizon.*

*On supposera que la sphère est abandonnée sans vitesse et que, à l'instant initial, le centre de gravité* G *de la sphère est dans le plan vertical passant par son centre de figure* O *et normal au plan incliné.*

*On appellera* $\theta$ *l'angle que fait, à l'instant* $t$, *la droite* OG *avec la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan incliné.*

Étudier le mouvement de la sphère. — *On demande en particulier :*

1° *D'exprimer, en fonction de* $\theta$, *la dérivée* $\frac{d\theta}{dt}$ *et la réaction* R *de la sphère sur le plan.*

2° *De dire s'il est possible de choisir la valeur initiale de* $\theta$, $\theta_0$, *de façon que, au début du mouvement, la sphère remonte le long du plan incliné.*

3° *D'examiner le cas où la valeur initiale de* $\theta$ *est très petite.*

INDICATIONS. — La projection de G sur le plan incliné a un mouvement uniformément varié ; on a, d'autre part,

$$\theta'^2(k^2 + a^2 \sin^2\theta) = 2ga\cos\alpha(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

On répondra à 2° en évaluant, à l'instant initial, l'accélération de O.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux points pesants* A *et* B, *de même poids* P, *sont mobiles sur une droite horizontale, l'un* A *avec frottement (le coefficient de frottement étant* $\frac{1}{10}$*), l'autre* B *sans frottement. Ils sont reliés par un fil élastique de masse négligeable et dont la tension est proportionnelle à l'allongement; la longueur naturelle de ce fil (sa tension étant nulle) est* $1^{m}$ ; *pour un allongement de* $1^{m}$ *la tension prend la valeur* $\frac{P}{5}$.

*On supposera qu'à l'instant initial la tension du fil est nulle et que les deux points ont* même vitesse : 2 *m/sec dirigée dans le sens* AB.

Étudier le mouvement des deux points *jusqu'à l'instant t où la vitesse de* A *s'annule. Calculer cet instant t. Dire ce que sera le mouvement immédiatement après l'instant t.*

*On prendra l'accélération de la pesanteur $g = 10\ m/sec.$*

INDICATIONS. — On trouve, pour les abscisses des deux points,

$$x_A + x_B = 1 + 4t - \frac{1}{2}t^2, \qquad x_B - x_A = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$$

et l'instant $t$, pour lequel A s'immobilise, est $3^s,60$.

(Marseille, novembre 1922.)

C. 53. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une tige rectiligne* AB, *homogène et pesante, de masse $m$, de longueur $2l$, mobile dans l'espace, vient heurter, par son extrémité* A, *un plan horizontal fixe* P.

*A l'instant du choc la tige fait avec le plan* P *l'angle $\theta_0$ donné, et tous les points de la tige ont la même vitesse donnée $v_0$ normale au plan. On suppose que le choc a lieu entre corps mous : le coefficient de restitution $e$ sera donc pris égal à zéro :*

1° *On admet que le contact de la tige et du plan a lieu sans frottement.*

*Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.*

*Discuter si, dans le mouvement qui suit immédiatement le choc, l'extrémité de la tige restera, ou non, en contact avec le plan* P. *Étudier sommairement, dans l'un ou l'autre cas, le mouvement de la tige jusqu'au moment où viendrait à se produire un nouveau choc.*

2° *Il y a frottement au contact de la tige et du plan, le coefficient de frottement étant $f$. Déterminer l'état des vitesses de la tige après le choc.*

C. 54. — ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Condition d'équilibre d'un fil inextensible, de masse négligeable, qui porte à ses extrémités les points matériels pesants* P *et* $P_1$, *de masses $m$ et $m_1$, et qui repose avec frottement ($f = 0,25$) sur un cylindre circulaire fixe, d'axe horizontal, en touchant ce cylindre suivant la demi-section droite* $A_1BA$.

2° *Les masses $m$ et $m_1$ étant égales, et le point* $P_1$ *restant immobile, on communique à* P *la vitesse $v_0$ normale à* AP (*dans le plan du fil*).

*a. On suppose d'abord que le fil* ne peut glisser sur le cylindre. *Évaluer, dans ces conditions, à un instant quelconque, la vitesse du point* P *et la tension du fil en* P *en fonction de l'angle $\theta$ du fil avec la verticale descendante.*

*b. Le coefficient de frottement au contact du fil et du cylindre étant toujours* $0,25$; *dire quelle condition doit remplir $v_0$ pour que,* au moins au début, *le mouvement précédent se produise effectivement sans qu'il y ait glissement du fil sur le cylindre.*

*On donne : $r$, rayon du cylindre*; $AP = l = 1^m$.

(Marseille, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dans un plan vertical fixe* P, *on a une verticale fixe* $Oz_1$ *et un cercle fixe* Γ.

1° *Mouvement d'un solide homogène pesant et de révolution dont le centre de gravité décrit* $Oz$ *et dont l'axe reste tangent à* Γ.

2° *Le plan* P *est animé d'une rotation uniforme de vitesse donnée* $\omega$ *autour de* $Oz_1$. *On se donne la valeur initiale* $\theta_0$ *de l'angle de l'axe avec* $Oz_1$; *montrer qu'on peut déterminer la rotation initiale* $r_0$ *du solide autour de son axe de façon qu'en partant de* $\theta_0$ *avec* $r_0$ *et* $\theta'_0 = 0$, *le paramètre* $\theta$ *reste en équilibre. — Gardant* $r_0$, *on part de* $\theta_0$ *avec une valeur très petite* $\theta'_0$; *comment verra-t-on si, dans le mouvement, le paramètre* $\theta$ *restera ou non très voisin de* $\theta_0$. — *Faire la distinction effective des valeurs de* $\theta_0$ *d'après cette propriété dans le cas où le cercle* Γ *se réduit à un point ?*

*Indications sur la solution.* — Les axes fixes et mobiles à choisir sont évidents. Pour la première partie, on a la liaison

$$a = b = 0, \qquad c = -\frac{R + l\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \psi = 0,$$

c'est un problème dans le cas régulier d'intégration visible *a priori*, car il admet l'intégrale des forces vives et l'intégrale de rotation autour de l'axe de révolution. En formant $2G = 2T + 2U$, écrivant les deux intégrales, on arrive pour $\theta$ à l'équation

$$[M(l + R\cos\theta)^2 + A\sin^4\theta]\theta'^2 = [h\sin\theta - 2Mg(R + l\cos\theta)]\sin^3\theta$$

dont la discussion ne présente aucune difficulté.

Pour la deuxième partie on a $\psi' = \omega$. On est encore dans le cas régulier d'intégration, mais avec l'intégrale généralisée des forces vives de Painlevé. On arrive ainsi à

$$\begin{aligned}[M(l + R\cos\theta)^2 + A\sin^4\theta]\theta'^2 &= [A\omega^2\sin^3\theta + 2Cr_0\omega\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + (h - Cr_0^2)\sin\theta - 2Mg(R + l\cos\theta)]\sin^3\theta = F(\theta)\sin^3\theta.\end{aligned}$$

Pour l'équilibre de $\theta$, il faut.

$$F(\theta_0) = 0, \qquad F'(\theta_0) = 0,$$

ces deux équations déterminent $h$ et $r_0$. Pour ces valeurs de $h$ et $r_0$, la fonction F à $\theta_0$ comme racine double. Si l'on donne à $\theta'_0$ une valeur qui n'est plus nulle, on augmente $h$, donc aussi la fonction F; il apparaîtra donc deux racines de part et d'autre de $\theta_0$ si F était maxima pour $\theta_0$, et il n'en apparaîtra aucune si F était minima, de sorte qu'il y a stabilité ou instabilité suivant le signe de $F''(\theta_0)$ pour les valeurs $h$, $r_0$ précédemment trouvées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *$Ox$ et $Oz$ étant deux axes rectangulaires, on considère l'aire limitée par les deux lignes*

$$z = (x - 2)^2, \qquad z = 1.$$

*Cette aire en tournant autour de $Oz$ engendre un solide de révolution qu'on suppose homogène et dont on demande le rayon de giration par rapport à la droite du plan $zx$,*

$$z = x - 2.$$

*Indications sur la solution.* — On calcule l'ellipsoïde d'inertie en O, on en déduit l'ellipsoïde central, d'où le moment d'inertie par rapport à la droite au moyen de ses cosinus directeurs et de sa distance au centre de gravité.

(Bordeaux, novembre 1923.)

*Un parallélépipède rectangle homogène, de masse $M = 12$ et de côtés*

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad c = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

*est mobile autour de son centre de gravité O et n'est soumis à aucune force.*

1° *Calculer les moments d'inertie A, B, C du solide, relatifs à ses axes de symétrie $Oxyz$ respectivement parallèles aux côtés $a$, $b$, $c$, ainsi que la vitesse angulaire initiale $(p_0 q_0 r_0)$ résultant du couple de percussion $(\sqrt{2}, 3, 1)$ appliqué au solide en repos.*

2° *Former et intégrer les équations numériques déterminant les composantes $p$, $q$, $r$ de la vitesse angulaire.*

3° *L'axe fixe $Oz$ étant pris en coïncidence avec le moment résultant $I$ des quantités de mouvement par rapport à O, calculer sans intégration les deux angles d'Euler $\theta$ et $\varphi$ en fonction du temps, au moyen des valeurs de $p$, $q$, $r$ précédemment calculées.*

4° *Calculer le troisième angle d'Euler $\psi$ en fonction du temps.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. A. CABANTOUS. — 1° Les moments d'inertie sont :

$$A = 4, \qquad B = 3, \qquad C = 2,$$

et la rotation initiale a pour composantes

$$p_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad q_0 = 1, \qquad r_0 = \frac{1}{2}.$$

2° Les équations classiques d'Euler se réduisent ici à

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{4}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{2rp}{3}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{pq}{2}. \tag{1}$$

On vérifie facilement que l'on se trouve dans le cas élémentaire où la polhodie est décomposée en deux coniques. Les équations précédentes donnent d'ailleurs

$$4p\frac{dp}{dt} = -\frac{3}{2}q\frac{dq}{dt} = 2r\frac{dr}{dt},$$

d'où en tenant compte des données initiales

$$2p^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}(q^2 - 1) = r^2 - \frac{1}{4},$$

et enfin

$$r = p\sqrt{2} = \sqrt{1 - \frac{3q^2}{4}};$$

en portant dans la seconde des équations (1), on a aisément

$$q = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{th}\,u, \qquad r = p\sqrt{2} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,u}$$

avec

$$u = \varepsilon - \frac{t}{\sqrt{6}} \qquad (\varepsilon = \text{const.}).$$

3° et 4° Il est inutile d'insister sur la méthode qui permet de calculer les angles d'Euler ($\theta$ et $\varphi$ sans intégration), on trouvera

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,u}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,u},$$

et

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{3}\,\frac{1 + \mathrm{th}^2 u}{2 + \mathrm{th}^2 u},$$

dont l'intégration est immédiate.

(Toulouse, juillet 1924.)