Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 145-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__145_0>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 44. — I. *On considère la droite* D *qui a pour équation*

$$u^3 x - 3uy - 1 = 0,$$

u, désigne un paramètre variable.

Déterminer et construire l'enveloppe de cette droite.

Soit A *un point de cette enveloppe, d'ordonnée* y_0. *Soit* Δ *celle des droites* D *qui est tangente en* A *à l'enveloppe. On considère l'aire limitée par la courbe enveloppe, la droite* Δ *et l'axe* O*y*. *Déterminer le centre de gravité de cette aire.*

C. 45. — II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2 y'^2 - 4xyy' + y^2 - x^2 = 0.$$

Par un point A *au plan, il passe, en général, deux courbes intégrales. Où doit se trouver le point* A *pour que ces deux courbes fassent un angle donné,* V *(c'est-à-dire pour que les deux tangentes en* A *fassent l'angle* V) ?

III. *On donne la fonction*

$$y = e^x \sin x$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe représentative.

Calculer le rayon de courbure de la courbe à l'origine des coordonnées.

Développer la fonction en série entière.

IV. *On considère les équations*

$$x = 3u + v,$$
$$y = u - v,$$
$$z = uv,$$

u et v désignent deux paramètres; x, y, z désignent les coordonnées d'un point.

Montrer que ces équations représentent une surface réglée.

On coupe la surface par la droite $x = y = z$. *Former l'équation du plan tangent à la surface en chacun des deux points d'intersection.*

Déterminer les plans tangents à la surface qui passent par la droite $x = y = z$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^3}$, calculer à $\frac{1}{10^5}$ près la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^3}.$$

2° *Calculer la valeur de la même intégrale en utilisant l'expression, à l'aide de fonctions usuelles, d'une primitive de $\frac{1}{1+x^3}$ et une table de logarithmes à cinq décimales. Évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.*

(Caen, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C. 46. — I. *Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy. On considère dans le plan xOy une courbe C passant par l'origine O, telle que le cosinus de l'angle avec Ox de la normale au point M d'abscisse x soit égal à*

$$\frac{1-x}{1+x}.$$

Calculer en fonction de x la longueur de l'arc S compris entre O et M et donner en fonction de x l'expression du rayon de courbure en M. Quelle est l'équation de la courbe C ?

C. 47. — II. *t représentant le temps, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un mobile sont données par les formules*

$$x = t^2, \qquad y = \frac{t^3}{3} - t, \qquad z = \frac{t^3}{3} + t.$$

Montrer que le mouvement ainsi défini est celui que prend un mobile de masse 1 s'il est placé dans le champ de forces défini par

$$X = 2, \qquad Y = z - y, \qquad Z = z - y,$$

et si on l'abandonne, à l'origine des coordonnées, avec une vitesse convenable. Quelle est l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy ?

III. *Déterminer la solution y de l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$. Quelle est la *partie principale de l'infiniment petit y, x étant l'infiniment petit principal ?*

Épreuve pratique. — *On donne l'équation*

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vérifier qu'elle a une racine double. Résoudre cette équation.
Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$$

Indications. — On met aisément le polynome sous la forme $(x+1)^2(x^2+1)$ et le calcul des éléments simples $\frac{A}{(x+1)^2}$, $\frac{B}{x+1}$, $\frac{C}{x^2+1}$ ainsi que l'intégration ne présentent aucune difficulté.

(Caen, novembre 1925.)

Épreuve théorique. — I. 1° *En désignant par α une constante, trouver l'*intervalle de convergence *de la série entière*

$$(1) \qquad y = x(1+\alpha) + \frac{x^2}{2}(1+\alpha^2) + \ldots + \frac{x^n}{n}(1+\alpha^n) + \ldots$$

et sa somme *dans cet intervalle.*

2° *Le développement en série de la fonction*

$$(2) \qquad y = \mathrm{L}\left(\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}\right)$$

peut-il coïncider avec (1) ?

Pour quelle valeur de α en est-il ainsi ?

3° *Construire, par rapport à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la courbe représentative de la fonction* (2).

4° *Calculer*

$$\int_0^x \mathrm{L}\left(\frac{1}{1 - 3y + 2y^2}\right) dy,$$

x étant un nombre positif moindre que $\frac{1}{2}$. Limite du résultat, quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

II. *Soit* C *la courbe définie, par rapport au trièdre trirectangle* Oxyz, *par les équations*

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t, \qquad z = e^t.$$

Trouver le cône engendré par les droites joignant l'origine à un point variable M *de cette courbe; l'angle de la tangente en* M, *dans le sens des t croissants, d'une part avec la demi-droite* OM, *d'autre part avec la demi-droite* Oz. *Indiquer l'aspect de la courbe* C. *Calculer son rayon de courbure.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. 1° Le rayon de convergence est le plus petit des nombres 1, $1 : |\alpha|$.

2° $$\alpha = 2.$$

3° $$I = \frac{1-2x}{2}\log(1-2x) + (1-x)\log(1-x) + 2x;$$

$$\lim = 1 - \frac{1}{2}\log 2.$$

II. 1° $$x^2 + y^2 = z^2.$$

2° $$\cos V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \cos V_2 = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

3° La courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique (hélice cylindro-conique).

4° $$R = \frac{3}{\sqrt{2}}\, e^t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver l'intégrale de l'équation différentielle*

$$y'' + y = x^2(\cos x + \sin x)$$

telle que, pour $x = 0$, *on ait* $y = 0$ *et* $y' = 1$.

SOLUTION :

$$y = -\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2+x}{4}\right)\cos x + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2-x+3}{4}\right)\sin x.$$

(Poitiers, novembre 1925.)

ÉPREUVE ÉCRITE (*Analyse*). — 1° *Trouver, pour l'équation différentielle*

$$(3x^2 - a^2)y + (3x^2 + a^2)xy' = 2x^3,$$

la courbe intégrale (Γ) *qui passe au point* A *de coordonnées* $x = a$, $y = a$.

2° *Montrer que l'équation de la courbe* (Γ) *peut s'écrire*

$$\frac{y-a}{y+a} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3;$$

étudier la forme de la courbe; déterminer ses points et tangentes remarquables. Pour le dessin, on prendra $a = 2^{cm}$.

3° *Par le point* A, *on peut mener à* (Γ) *une seule tangente* AB *dont le point de contact* B *soit distinct de* A. *Calculer l'aire comprise entre le segment de droite* BA *et l'arc* BA *de la courbe* (Γ).

4° *Calculer avec trois décimales exactes, en prenant* $a = 1$, *l'abscisse du point* P *de l'arc* OA *sur la courbe* (Γ), *où la tangente a pour pente* 1.

Indications sur la solution. — 1° L'équation de la courbe (Γ) s'obtient immédiatement sous la forme

$$y = \frac{x^3 + 3a^2 x}{3x^2 + a^2}.$$

2° La droite $y = \frac{x}{3}$ est asymptote, la droite $y = 3x$ tangente en O, l'origine centre de symétrie, le point A point d'inflexion à tangente parallèle à Ox.

3° B a pour coordonnées $-\frac{a}{3}$ et $-\frac{7a}{9}$; l'aire vaut $\frac{4a^2}{9}$ Log3.

4° L'abscisse de P est 0,393.

Épreuve théorique (*Mécanique*). — *Une barre homogène pesante, de longueur* $2a$ *et de poids* P, *s'appuie sur un sol horizontal par une de ses extrémités* A; *elle s'appuie en outre sans frottement sur un cylindre horizontal de section infiniment petite* O, *dont les génératrices sont normales à la barre et fixé à une hauteur* h *au-dessus du sol :*

I. *En désignant par* f *le coefficient de frottement de la barre sur le sol, former la condition à laquelle doit satisfaire l'angle* α *de la barre avec le sol pour que l'équilibre soit possible et calculer en fonction de* α *les valeurs correspondantes des réactions.*

II. *En supposant* $h < a$, *quelle serait la condition d'équilibre limite en supposant* f *très grand, c'est-à-dire théoriquement infini? Donner les expressions plus simples auxquelles se réduiraient alors les réactions et les représenter de façon vraisemblable, en même temps que le poids* P, *sur une figure spéciale.*

Solution I. — Les équations d'équilibre donnent, R étant la réaction en O, N et T les composantes normale et tangentielle de la réaction en A,

$$P = R\cos\alpha + N, \qquad T = R\sin\alpha, \qquad Pa\cos\alpha = R\frac{h}{\sin\alpha};$$

d'où

$$R = P\frac{a}{h}\sin\alpha\cos\alpha, \qquad T = P\frac{a}{h}\sin^2\alpha\cos\alpha, \qquad N = P\left(1 - \frac{a}{h}\sin\alpha\cos^2\alpha\right).$$

La condition $T \leqq fN$ donne

$$\frac{a}{h}\sin^2\alpha\cos\alpha \leqq \left(1 - \frac{a}{h}\sin\alpha\cos^2\alpha\right)f,$$

dont une solution évidente est $\cos\alpha = 0$.

II. Pour $f = \infty$, la condition d'équilibre limite est

$$\frac{h}{a} - \sin\alpha\cos^2\alpha = 0$$

et alors

$$R = \frac{P}{\cos\alpha}, \qquad T = P\,\mathrm{tang}\,\alpha, \qquad N = 0.$$

(Toulouse, novembre 1925.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' + 2hy' + 4y = 6\sin x + 8x^2.$$

Diverses formes de l'intégrale générale suivant la valeur de la constante positive h.

2° *Cas particulier où*

$$h = 1, \qquad h = 2, \qquad h = 3.$$

3° *Trouver dans le cas particulier où $h = 0$ une solution $y = f(x)$ telle que y et y' soient nuls pour $x = 0$ et déterminer l'ordre et la partie principale de $f(x)$ pour x infiniment petit.*

II. *Montrer qu'il existe une fonction $z = f(x, y)$ telle que l'on ait*

$$dz = \frac{(y^2 - y + x)\,dx + (y - x^2 - x)\,dy}{(y - x)^2}$$

et déterminer cette fonction.

III. *Les axes étant rectangulaires et a désignant une constante positive, on considère le solide limité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, les surfaces*

(S) $$a^3 z = xy^3,$$

(C) $$x^2 + y^2 = a^2$$

et situé dans le trièdre où x, y, z sont positifs.

Calculer le volume de ce solide et l'aire de la face située sur C.

Indications sur la solution. — I. 1° et 2° Pour $h > 2$, on a

$$y = e^{-hx}\left(A\,e^{x\sqrt{h^2-4}} + B\,e^{-x\sqrt{h^2-4}}\right)$$
$$+ \frac{6(3\sin x - 2h\cos x)}{9 + 4h^2} + 2x^2 - 2hx + h^2 - 1,$$

et l'on remplacera la première parenthèse par

$$A \sin\left(\sqrt{4-h^2}\,x+\varphi\right) \quad \text{ou} \quad Ax+B,$$

suivant que h est plus petit ou égal à 2.

3° Pour $h=0$, on a

$$y=\cos 2x-\sin 2x+2\sin x+2x^2-1\equiv x^3(1-\varepsilon).$$

II. $$z=\frac{xy}{y-x}+\mathrm{L}\,|y-x|+\mathrm{C}.$$

IV. 1° Aire égale à $\frac{a^2}{4}$; 2° volume égal à $\frac{a^3}{24}$.

Épreuve pratique. — I. C. 48. — *L'axe* Oy *étant vertical et dirigé vers le bas, un point* M *de masse* m *et de poids* mg *est mobile sans frottement sur la courbe représentée par :* $x=au^3$, $y=au^2$. *A l'instant initial,* M *est placé au point le plus haut de la courbe et sa vitesse* v_0 *est donnée par* $v_0^2=2\lambda ga$, λ *et* a *sont des constantes positives.*

1° *Former l'équation différentielle du mouvement;*
2° *Intégrer cette équation dans le cas où* $\lambda=0$;
3° *Intégrer dans le cas de* λ *quelconque;*
4° *Loi du mouvement dans le cas où* $\lambda=\frac{4}{9}$. *Déterminer dans ce cas les composantes de la force qui, agissant sur le point* M, *supposé libre et non pesant, produirait ce mouvement.*

II. *Discuter l'équation*

$$x-(1+x)\,\mathrm{L}(1+x)^2=0$$

et calculer ses racines à une unité près.

(Lyon, novembre 1925.)

Épreuve théorique. — I. *Soit l'équation différentielle*

$$x^2(x+1)y'=x(x+2)y-3(x+1)^2.$$

1° *L'intégrer. Constater que l'une des courbes intégrales* Γ *est une conique* (C), *la construire.*

2° C *mise à part, les* Γ *ont trois asymptotes, deux sont fixes, la troisième passe par un point fixe.*

3° *Construire la courbe intégrale* Γ_0 *qui a une asymptote horizontale. Comment,* C *et* Γ_0 *étant supposées tracées, peut-on tracer la* Γ *qui passe par un point donné.*

4° *Les tangentes aux* Γ *en leurs points d'intersection avec une mê parallèle* Δ *à* Oy *passent par un point fixe. Lieu de ce point quanc varie.*

5° *Lieu des points d'inflexion des* Γ.

II. *Définir le plan osculateur à une courbe. Former son équation supposant les coordonnées d'un point de la courbe données en foncti d'un paramètre* t.

Indications sur la solution. — I. L'équation proposée linéaire du p mier ordre avec second membre s'intègre par le procédé classique

$$y = \frac{Cx^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x+1)}.$$

Ce sera une conique si $(x+1)$ est en facteur au numérateur, $C = 1$, d

$$(C) \qquad y = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

Les deux asymptotes fixes des Γ sont $x = 0$ et $x = -1$, la troisiè cherchée par les procédés classiques est $y - Cx = 3$. Γ_0 est la Γ qui donnée par $C = 0$. La construction demandée d'une Γ résulte de la relat

x+3-C

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \text{const.}$$

qui existe entre les ordonnées de Γ, C et Γ_0 pour la même valeur de x. tangentes aux diverses Γ aux points d'intersection avec Δ dépendent lin rement de C, donc passent par un point fixe dont on trouve facilemen coordonnées en fonction de x, puis le lieu géométrique.

Les points d'inflexion ont leurs x déterminés par l'équation $y'' = 0$; lieu s'obtient par l'élimination de C entre deux équations de premier de

II. Question de cours.

Épreuve pratique. — I. *Établir les formules de récurrence pour intégrales définies*

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx, \qquad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \qquad (n \text{ entier positif})$$

Les calculer à 0,001 *près pour* $n = 1, 2, 3, 4$.

II. *Soit la courbe gauche* Γ

$$y = \frac{1}{2} x^2 \cos x, \qquad z = \frac{1}{2} x^2 \sin x$$

Déterminer : 1° *le rayon de courbure en un point quelconque;* 2° *la tangente, la normale principale et la binormale à l'origine.*

III. *La densité linéaire de* Γ *étant constante* (*égale à* 1), *calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de* Γ *qui correspond aux valeurs de* x *comprises entre* O *et* $\frac{\pi}{2}$ (*on les exprimera en fonction des* A *et* B *de la première partie et on les calculera à* 0,001 *près*).

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — C'est une application numérique des formules du cours.

(Bordeaux, novembre 1925.)