Ét. Delassus

Propriétés mécaniques des formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 134-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__134_0>

PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES FORMES QUADRATIQUES;

Par Ét. DELASSUS.

1. La Mécanique introduit des formes quadratiques F non forcément homogènes, dont le type est la force vive, et qui possèdent toutes la propriété que leur portion homogène et du second degré F_2 est essentiellement positive et à discriminant non nul.

Les propriétés qu'on utilise en mécanique, qu'on démontre d'une façon indépendante et qui, d'ailleurs, se présentent sous des formes bien distinctes en apparence, peuvent aisément dériver d'une propriété générale assez simple, facile à démontrer et qui montre le rôle fondamental que joue dans l'étude d'une forme quadratique non homogène la *forme auxiliaire*

$$[F] = F_2 - F_0,$$

dont l'importance est déjà mise en évidence par l'intégrale généralisée des forces vives de M. Painlevé.

2. Considérons, relativement à notre forme $F(x)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'identité aux ω

$$(1) \qquad \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \omega_i + \sum_1^p z_j \alpha_j(\omega) \equiv \sum_1^m y_j \varphi_j(\omega),$$

accompagnée des équations

$$(2) \qquad \alpha_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p(x) = 0,$$

en supposant

$$p + m \leqq n,$$

et que les $\alpha(x)$ et $\varphi(x)$ soient des fonctions linéaires et homogènes distinctes.

Nous introduisons ainsi les deux fonctions bilinéaires

$$R = \Sigma z\, \alpha(x) = \Sigma x\, \gamma(z),$$
$$S = \Sigma y\, \varphi(x) = \Sigma x\, \psi(y),$$

et, vu les hypothèses faites sur F ainsi que sur les fonctions α et φ, il résulte d'un théorème que j'ai démontré dans un article récent (¹) que les deux formes quadratiques

$$\begin{aligned} \theta(x, z) &= F + R, \\ \Theta(x, y, z) &= S - R - F \end{aligned}$$

ont toutes deux leur portion du second degré à discriminant non nul.

De la propriété de θ nous déduisons immédiatement que les $n+p$ équations (1) et (2) sont résolubles aux inconnues x et z et les fourniront comme fonctions linéaires des y.

3. Dans le cas général, nous n'avons pas, en passant des x aux y, un changement de variables puisque nous exprimons les x au moyen d'un nombre moindre de variables y. Néanmoins il est utile dans diverses questions, de voir en quoi se transforment ainsi les différentes fonctions de x qui ont figuré dans le calcul.

La question ne se pose évidemment pas pour les $\alpha(x)$ qui deviennent des fonctions des y identiquement nulles.

Cherchons ce que deviennent les $\varphi(x)$. A cet effet remarquons que les $n+p$ équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_1} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial\Theta}{\partial z_1} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\Theta}{\partial z_p} = 0, \end{array}$$

de sorte que si nous désignons par $\Phi(y)$ la forme quadratique des y que devient Θ quand on y remplace les x et les z par leurs expressions en fonction des y on aura, pour un y quelconque,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \sum \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \sum \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Ainsi les $\varphi(x)$ deviennent les dérivées partielles d'une même forme quadratique $\Phi(y)$.

(¹) Et. Delassus, *Sur les équations de Lagrange du mouvement d'un système non holonome* (*N. A.*, 5ᵉ série, t. III, 1925, p. 191.

Remarquons en passant que si F renferme des variables auxiliaires u, ne figurant ni dans R ni dans S, on aura, par le même calcul,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\partial\Theta}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial u}.$$

4. Des calculs précédents résultent aussi les formules

$$S = \Sigma y\,\varphi(x) = \Sigma y \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2\Phi_2 + \Phi_1,$$

$$F = S + R - \Phi = 2\Phi_2 + \Phi_1 - (\Phi_2 + \Phi_1 + \Phi_0) = [\Phi],$$

$$[F] = \Sigma x \frac{\partial F}{\partial x} - F = (S - R) - F = 2\Phi_2 + \Phi_1 - [\Phi_2 - \Phi_0] = \Phi,$$

qui nous donnent les transformées de S, F et [F].

5. Cherchons à voir les propriétés de Φ_2. Nous obtiendrons évidemment Φ_2, en réduisant les expressions des x et z à leurs parties homogènes et du premier degré puis les portant dans la portion Θ_2 de Θ. Cela revient à faire tous les calculs qui précèdent en remplaçant F par F_2; on aura ainsi

$$F_2 = [\Phi_2] = \Phi_2,$$

d'où cette première propriété que Φ_2 est essentiellement positive. Voyons son discriminant. S'il était nul, on pourrait trouver des y non tous nuls annulant toutes les dérivées $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$; les valeurs correspondantes des x annuleraient donc les $\varphi(x)$, de sorte qu'il existerait des valeurs x, z et y, ces dernières non toutes nulles satisfaisant aux équations

$$\sum \frac{\partial F_2}{\partial x}\omega + \sum z\,\alpha(\omega) - \sum y\,\varphi(\omega) \equiv 0,$$

$$\alpha_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p(x) = 0,$$

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m(x) = 0,$$

et ce résultat est absurde, car de ce que le discriminant de Θ_2 n'est pas nul résulte que ces $n + p + m$ équations linéaires et homogènes à $n + p + m$ inconnues exigent que ces inconnues soient toutes nulles.

La forme quadratique Φ à laquelle on parvient et au moyen de laquelle tout s'exprime après la transformation est donc une forme possédant les propriétés caractéristiques de la forme F dont on est parti.

6. Les propriétés des paragraphes précédents constituent le théorème général que nous avions en vue et qu'il serait puéril de chercher à formuler en un énoncé plus ou moins clair mais certainement fort long.

En supposant F homogène il trouve, sous cette forme générale, son application directe dans la théorie des liaisons finies unilatérales.

Dans le cas

$$p = 0, \qquad m = n,$$

F étant quelconque, on a un véritable changement de variables défini par les formules

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \psi_1(y), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \psi_n(y),$$

et l'application du théorème montre que ces équations peuvent se mettre sous la seconde forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \varphi_1(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_n(x),$$

les fonctions φ et ψ se correspondant par l'identité

$$S = \Sigma y\, \varphi(x) \equiv \Sigma x\, \psi(y).$$

On peut alors dire que les deux formes non homogènes F et Φ sont des formes adjointes relativement à la forme bilinéaire S.

Chacune d'elles n'est pas la transformée de l'autre, mais la transformée de sa forme auxiliaire.

Dans le cas particulier où l'on prend

$$S = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

on trouve la transformation d'Hamilton sous ses deux formes résolues

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = y_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = y_n.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = x_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = x_n.$$

Enfin si, plus particulièrement encore, on suppose F homogène, on retrouve la notion et les propriétés élémentaires des formes adjointes ordinaires. Les deux formes F, Φ sont alors transformées l'une de l'autre.

7. Dans certaines questions, on est amené à considérer des formes adjointes partielles.

Soit F forme quadratique de $x_1 \ldots x_n z_1 \ldots z_p$; continuons à désigner par $[F]$ sa forme auxiliaire et désignons par $[F]_x$ la forme auxiliaire obtenue en considérant F comme forme quadratique des x seuls, les z étant considérés comme des variables supplémentaires au même titre que les autres désignées par u.

Au moyen d'une forme bilinéaire $S(x, y)$ et de $[F]_x$ nous formerons la forme adjointe partielle Φ_x qui, comme on s'en assure aisément, sera une forme quadratique des y et des z; cette transformation nous donnera les égalités

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \Psi(y),$$

$$\varphi(x) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial u}$$

et

$$\Phi_x = [F]_x = \Sigma x \frac{\partial F}{\partial x} - F.$$

Si, aux deux membres de cette dernière égalité nous ajoutons les quantités égales

$$-\Sigma z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \Sigma z \frac{\partial F}{\partial z},$$

nous obtenons immédiatement l'égalité

$$-[\Phi_x]_z = [F].$$

Ces propriétés, dans le cas de $S = \Sigma xy$, trouvent leur application immédiate dans la réduction des systèmes de Lagrange à paramètres secondaires, la dernière fournissant la réduction de l'intégrale des forces vives.