Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 126-128

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__126_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.1.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en octobre* 1925, *p.* 31.]

SOLUTION
par J. DE CAUMONT.

1° Il s'agit d'obtenir le développement en série entière de

$$F(x) = \int_0^\infty e^{xt-t^3}\,dt.$$

En développant e^{xt} en série et en admettant qu'il soit permis d'intégrer terme à terme, on obtient

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^3}\,dt + \frac{x}{1!}\int_0^\infty t\,e^{-t^3}\,dt + \frac{x^2}{2!}\int_0^\infty t^2 e^{-t^3}\,dt + \ldots,$$

ou, en posant $t^3 = u$,

$$3F(x) = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{2}{3}} e^{-u}\,du + \frac{x}{1!}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u}\,du + \frac{x^2}{2!}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du + \ldots.$$

Les coefficients de x^0, $\frac{x}{1!}$, $\frac{x^2}{2!}$, ... sont respectivement $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{3}\right)$, ... Rappelons que

$$\Gamma\left(\frac{3p+1}{3}\right) = \frac{1.4.7\ldots(3p-2)}{3^p}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$\Gamma\left(\frac{3p+2}{3}\right) = \frac{2.5.8\ldots(3p-1)}{3^p}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

D'où le développement

$$F(x) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{3p}}{(3p)!}\,\frac{1.4\ldots3p-2}{3^p}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$+ \frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!}\,\frac{2.5\ldots3p-1}{3^p}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!}\,1.2\ldots p + \ldots.$$

La série du second membre a un rayon de convergence infini (rapport d'un terme au précédent). Elle représente bien $F(x)$. Soient, en effet, $S_n(x)$ et $R_n(x)$ la somme des n premiers termes et le reste correspondant, soit $r_n(tx)$ le reste analogue dans la série e^{xt}; on a

$$F(x) = S_n(x) + \int_0^\infty r_n(xt)\, e^{-t^3}\, dt$$

et il faut vérifier que l'intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or, on augmente cette intégrale en remplaçant x par $|x|$ et, d'autre part, pour une limite supérieure finie, on obtient une valeur évidemment inférieure à $R_n(|x|)$. L'intégrale est donc inférieure ou égale à $R_n(|x|)$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

2° Pour développer en série les fonctions

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3)\, d\rho, \quad \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3)\, d\rho,$$

nous calculerons l'intégrale

$$\int e^{wz - w^3}\, dw \qquad \left(z = x e^{\frac{i\pi}{3}};\ x \text{ réel}\right)$$

étendue au contour suivant du plan de la variable complexe w : *a.* la partie positive de l'axe des x; *b.* un arc de cercle de centre O, de rayon infini, d'angle au centre $\frac{\pi}{6}$; *c.* la droite qui fait avec Ox l'angle $\frac{\pi}{6}$ décrite de l'infini à zéro. L'intégrale le long de ce contour est nulle; elle est nulle le long de l'arc de cercle, comme le montre un raisonnement classique; d'autre part, le long de la deuxième droite, on a

$$w = \rho e^{\frac{\pi i}{6}} \qquad (\rho \text{ réel});$$

donc

$$e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \int_0^\infty e^{i(\rho x - \rho^3)} d\rho = \int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3) d\rho + i \int_0^\infty \sin(\rho x - \rho^3)\, d\rho.$$

La partie réelle, dans le développement de $e^{-\frac{i\pi}{6}} F\left(xe^{\frac{\pi i}{3}}\right)$ est

$$\int_0^\infty \cos(\rho x - \rho^3)\, d\rho$$

égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{x}{1}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{x^3}{3!}\,\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{x^4}{4!}\,\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots\right].$$

Les termes du développement de $F(x)$ sont multipliés successivement par $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots$.

Le coefficient de i, $\int_0^\infty \sin(\rho^x - \rho^3)\,d\rho$, s'obtiendra en multipliant les termes de $F(x)$ successivement par $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$.

Question C.2.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve pratique ; énoncé publié en octobre* 1925, *p.* 31.]

SOLUTION

par J. DE CAUMONT.

1° On trouvera

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = 2,622$$

avec trois décimales exactes;

2° Il s'agit d'évaluer l'intégrale

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}$$

prise le long d'un chemin complexe allant de -1 à $+1$ et coupant l'axe imaginaire en un seul point d'ordonnée plus grande que 1. En complétant le chemin en question par le segment d'axe réel allant de $+1$ à -1, on a un circuit équivalent au lacet qui part de 0 en suivant l'axe des y, entoure le point $z = i$ et revient en 0 en suivant l'axe des y. L'intégrale le long du lacet est

$$2 \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

c'est-à-dire ($z = \rho i$),

$$2i \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^4}} = iI\,;$$

l'intégrale prise le long du segment $+1, -1$ d'axe réel est I, car il faut changer le signe du radical. Donc

$$J + I = iI\,;$$
$$J = I(i - 1).$$