Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 115-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__115_0>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.29. — 1° *Montrer qu'on peut écrire*

$$\frac{e^{xz}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \frac{z^{m-1}}{m!}, \tag{1}$$

la série étant convergente dans un domaine qu'on indiquera ; montrer que $\varphi_m(x)$ *est un polynome de degré* m.

2° *En dérivant et intégrant les deux membres de* (1), *montrer que*

$$\varphi'_1(x) = 1, \tag{2}$$

$$\varphi'_m(x) = m\varphi_{m-1}(x) \qquad (m = 2, 3, \ldots, +\infty), \tag{3}$$

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\, dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots +\infty). \tag{4}$$

3° *On considère la fonction*

$$\psi_1(x) = -2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p\pi x)}{2p\pi}, \tag{5}$$

où x *est réel. Décomposer chaque terme de la série en deux, en exprimant les sinus à l'aide de la fonction exponentielle, et se servir de cette décomposition pour prouver que, pour* $0 < x < 1$,

$$\psi_1(x) = \frac{2x - 1}{2}. \tag{6}$$

(*On aura à considérer deux séries de Taylor sur leurs cercles de convergence.*)

4° *Si l'on pose*

$$\psi_m(x) = -2m! \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2p\pi x - \frac{m\pi}{2}\right)}{(2p\pi)^m} \qquad (m = 2, 3, \ldots, \infty), \tag{7}$$

montrer que ces fonctions sont continues quel que soit x, *et que*

$$\psi'_m(x) = m\psi_{m-1}(x) \qquad (m = 2, 3, \ldots, \infty) \tag{8}$$

(*sauf pour x entier, si $m = 2$*), *et que*

(9) $$\int_0^1 \psi_m(x)\,dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, \infty).$$

5° *Conclure de là que*

(10) $$\psi_m(x) = \varphi_m(x) \qquad (0 < x < 1;\ m = 1, 2, \ldots, \infty),$$

la relation ayant lieu aussi pour $x = 0$ et pour $x = 1$ si $m > 1$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.30. — *On considère l'équation différentielle*

(1) $$y'' + y = e^{-mx},$$

où y est la fonction inconnue de x et où m est une constante positive.

1° *Déterminer la solution $y = u_m(x)$ de cette équation qui est positive quel que soit x réel.*

2° *Montrer que la série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ converge quel que soit $x \geqq 0$ et qu'elle représente une solution de l'équation*

(2) $$y'' + y = \frac{1}{1 - e^{-x}};$$

en conclure que les solutions de cette équation restent finies quand x tend vers zéro par valeurs positives.

3° *En remplaçant, dans* (2), *y par $z + \sin x \,.\, \log x$, montrer que z est holomorphe pour $x = 0$.*

4° *Considérer la série $\sum_{m=1}^{\infty} \left[u'_m(x) - \frac{e^{-mx}}{m} \right]$; montrer qu'elle converge pour $x \geqq 0$. En conclure la limite, pour $x = 0$, de la dérivée de*

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) - \sin x \log x.$$

Calculer cette limite, à $\frac{1}{100}$ près. Calculer également, à $\frac{1}{100}$ près,

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(0).$$

(Clermont-Ferrand, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.31. — I. *Étant donné un système de trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *à un point quelconque* M *de coordonnées* (x, y, z) *de l'espace on fait correspondre le plan* P *représenté par l'équation*

$$x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x,y)}(Z - z) = 0,$$

X, Y, Z, *désignant les coordonnées courantes, et* $\lambda(x, y)$ *étant une fonction des deux variables* x *et* y *indépendante de* z. *Soit* Γ *une courbe gauche, telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points coïncide avec le plan* P, *correspondant à ce point.*

1° *La fonction* $\lambda(x, y)$ *étant donnée, démontrer qu'il existe en général deux familles de courbes* Γ, *de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille, et une seule, par un point quelconque de l'espace. Former l'équation différentielle qui détermine les projections de ces courbes sur le plan* xOy.

2° *Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes* Γ, *et quelle est la nature de ces surfaces ?*

3° *Déterminer les fonctions* $\lambda(x, y)$, *pour lesquelles les deux familles de courbes* Γ *sont confondues.*

4° *Trouver l'expression générale des fonctions* $\lambda(x, y)$ *telles que les courbes* Γ *correspondantes se projettent sur le plan des* xy *suivant deux familles de courbes orthogonales. Inversement, étant données dans le plan* xOy, *deux familles de courbes orthogonales, sont-elles toujours les projections des deux familles de courbes* Γ *correspondant à une fonction* $\lambda(x, y)$?

Exemple. — *Déterminer la fonction* $\lambda(x, y)$, *de façon que les courbes* Γ *se projettent sur le plan* xOy *suivant les paraboles* $y^2 = 2Cx$ (*où* C *est une constante arbitraire*), *et leurs trajectoires orthogonales.*

C.32. — II. *Soient* $P(x, y)$, $Q(x, y)$ *deux fonctions rationnelles des variables* x, y, *satisfaisant à la condition*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si, dans $P(x, y)$, *on donne à* y *une valeur constante* y_0, *on obtient une fonction rationnelle*

$$\varphi(x) = P(x, y_0)$$

de la seule variable x. *Démontrer, en s'appuyant sur les théorèmes classiques de Cauchy, que les résidus de cette fonction rationnelle* $\varphi(x)$ *sont indépendants de* y_0.

Quelle serait la proposition réciproque ?

Application. — *Soit* $P(x, y)$ *la fonction rationnelle*

$$P(x, y) = \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F}{x^2 - 2xy + 1};$$

on demande comment il faut prendre les coefficients constants A, B, C, D, E, F, *pour qu'il existe une autre fonction rationnelle* $Q(x, y)$ *telle que*

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

soit une différentielle exacte.

Epreuve pratique. — C.33. — 1° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{-3x + 4y - z}{2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + z, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{3x - 12y + 9z}{2}. \end{aligned} \right.$$

En particulier, donner les expressions des inconnues x, y, z, *en fonction de* t *et des valeurs* x_0, y_0, z_0 *de ces inconnues pour* $t = 0$.

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{-3x + 4y - z}{2} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2},$$

où p *et* q *sont les dérivées* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *de la fonction inconnue* $z(x, y)$. *Déterminer en particulier la surface intégrale de l'équation* (E) *qui contient l'axe* Ox, *c'est-à-dire pour laquelle* $z(x, 0) \equiv 0$; *donner l'équation cartésienne de cette surface intégrale.*

3° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $f(x, y, z)$ *est la fonction inconnue à déterminer.*

(Paris, juin 1923.)