NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Sur un problème relatif aux nombres incommensurables

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 100-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__100_0>

[11]

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX NOMBRES INCOMMENSURABLES ;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Dans la théorie qu'il a faite d'un certain jeu mathématique, W. A. Wythoff (1) établit la curieuse proposition suivante, dont la démonstration est reproduite dans les *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* de W. Ahrens (2) :

Désignons par $[x]$, suivant la notation de Gauss, la partie entière d'un nombre non entier x, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement inférieur à x. Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \beta = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}),$$

et formons les deux suites infinies

$$\text{(A)} \qquad [\alpha], \quad [2\alpha], \quad [3\alpha], \quad \ldots,$$
$$\text{(B)} \qquad [\beta], \quad [2\beta], \quad [3\beta], \quad \ldots.$$

Chaque nombre entier positif figure une fois et une fois seulement dans l'ensemble des suites (A) *et* (B).

2. Proposons-nous de trouver de la manière la plus générale un système de deux nombres positifs incommensurables α et β jouissant de la même propriété que les deux nombres particuliers indiqués ci-dessus.

Soit p un entier positif quelconque. Posons

$$m = [p\alpha],$$

de sorte qu'on a

$$(1) \qquad m < p\alpha < m+1.$$

(1) W. A. WYTHOFF, *A modification of the game of Nim*, 1906 (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2e série, t. VII, 1907, p. 199-202).

(2) Deuxième édition, p. 84-88.

Il existe un entier q tel qu'on ait

$$q\beta < m < (q+1)\beta. \tag{2}$$

Considérons alors les quatre suites, dont les deux premières sont finies et les deux dernières infinies,

$$(a) \qquad [\alpha],\ [2\alpha],\ \ldots,\ [p\alpha];$$
$$(b) \qquad [\beta],\ [2\beta],\ \ldots,\ [q\beta];$$
$$(a') \qquad [(p+1)\alpha],\ [(p+2)\alpha],\ \ldots,$$
$$(b') \qquad [(q+1)\beta],\ [(q+2)\beta],\ \ldots.$$

Les (a) et les (b) sont au plus égaux à m, et l'on a en particulier $[p\alpha] = m$. Les (a') et (b') sont tous supérieurs à m. En effet, ils lui sont au moins égaux, et si α et β sont des nombres satisfaisants, l'égalité ne peut avoir lieu, puisque dans l'ensemble des nombres (A) et (B) on a déjà le terme $[p\alpha]$ qui est égal à m.

Par conséquent, tout entier $\leqq m$ doit figurer une fois et une fois seulement dans les suites (a) et (b), et l'on a

$$p + q = m. \tag{3}$$

Cela posé, on tire de (1) et (2)

$$\frac{m}{\alpha} < p < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}, \tag{4}$$

$$\frac{m}{\beta} - 1 < q < \frac{m}{\beta}, \tag{5}$$

et en ajoutant, tenu compte de (3),

$$m\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - 1 < m < m\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{m} < 1 < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha m}.$$

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre p; m tend aussi vers l'infini. Les membres extrêmes de la double inégalité précédente tendent tous deux vers $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. Donc

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \tag{6}$$

Telle est la condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les nombres incommensurables α et β. *Je dis qu'elle est suffisante.*

Montrons d'abord que les suites (A) et (B) ne peuvent avoir de terme commun. En effet, dans l'hypothèse contraire, il existerait des entiers m, p, q, tels que l'on eût

$$m + x = p\alpha, \tag{7}$$
$$m + y = q\beta, \tag{8}$$

avec

$$0 < x < 1, \qquad 0 < y < 1, \tag{9}$$

bornes exclues, α et β étant incommensurables.

Ajoutons (7) et (8) multipliées respectivement par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$. Il vient, tenu compte de (6),

$$m + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q,$$

d'où

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q - m.$$

Par conséquent $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}$ serait entier. Or, il résulte de l'égalité (6) et des inégalités (9) que la valeur de cette expression est comprise entre 0 et 1, bornes exclues. Il est donc établi que tous les nombres (A) et (B) sont distincts.

Cela vu, récrivons les égalités (1) et (2) et les (4) et (5) qui en résultent. On tire de ces dernières par addition, et tenu compte de (6),

$$m - 1 < p + q < m + \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$p + q = m.$$

Il en résulte que dans les suites (a) et (b) dont les termes, en nombre total $p + q$, sont tous différents, chacun des nombres 1, 2, ..., m se rencontre une fois et une seule, ce qui achève la démonstration, puisque m peut être pris aussi grand qu'on le veut.

On vérifie aisément que les nombres de M. Wythoff satisfont bien à la relation (6).

3. Ce qui précède constitue une extension facile du résultat de M. Wythoff. Mais je tiens à signaler un problème plus général, qui me paraît beaucoup plus ardu, et que voici : *à quelles condi-*

tions nécessaires et suffisantes doivent satisfaire les nombres incommensurables positifs α *et* β *pour que les entiers* (A) *et* (B) *soient tous distincts* (on n'exige plus qu'ils reproduisent la suite *complète* des nombres naturels).

On obtient un système satisfaisant en assujettissant α et β à la relation

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k}, \tag{10}$$

k étant un entier positif quelconque. La démonstration est une extension immédiate de celle qui a été donnée ci-dessus, pour $k = 1$: en effet, supposé que l'on ait les égalités (7) et (8) et les inégalités (9), on tire de (7), (8) et (10)

$$m\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{m}{k} + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = p + q,$$

d'où

$$k\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) = k(p+q) - m,$$

égalité impossible, car le second membre est entier et le premier compris entre 0 et 1.

Mais rien ne prouve que l'on ait ainsi la solution complète.

On peut encore se poser un problème plus général. Soient α et β deux nombres incommensurables positifs quelconques; m étant un entier positif quelconque, il existe deux entiers p_m et q_m tels que l'on ait

$$m + x_m = p_m \alpha,$$
$$m + y_m = q_m \beta,$$

avec

$$0 < x_m < \alpha, \qquad 0 < y_m < \beta.$$

Ne conservons que les nombres m pour lesquels $x_m < 1$ (il faut bien entendu supposer $\alpha > 1$, sans quoi le problème ne se pose pas). *Quelle est alors la borne inférieure des nombres* y_m ? On vient de voir que si la relation (10) est satisfaite, cette borne inférieure est au moins égale à 1.

On pourrait aussi chercher la borne inférieure de $x_m + y_m$, m prenant cette fois toutes les valeurs entières, etc. Les problèmes ne manquent pas, mais il est plus facile d'en poser dix que d'en résoudre un seul.