

Agrégation des sciences mathématiques (session de 1924)

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 95-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__95_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.
(SESSION DE 1924.)

Problème de Calcul différentiel et intégral.

I. Soient S et S_1 deux surfaces données. On fait correspondre chacun à chacun, suivant une certaine loi (L) , les points M de S et les points M_1 de S_1 . Toutes les fonctions employées sont analytiques.

Montrer que les courbes, sur lesquelles les longueurs d'arcs se conservent, forment en général deux familles à un paramètre.

II. Montrer que si ces familles se confondent en une seule (savoir F sur S , F_1 sur S_1), la loi (L) fait correspondre aux trajectoires orthogonales des courbes F celles des courbes F_1 .

Réciproque.

III. On suppose en outre que la loi (L) associe à une courbe F quelconque une courbe F_1 égale, de sorte que les arcs superposables de ces deux courbes soient homologues. On convient alors de dire que la correspondance de S et de S_1 est d'espèce :

(α) si (L) ne réalise pas l'application de S et S_1 ;

(β) si (L) les rend superposables mais non pas superposées.

On suppose d'abord que F et F_1 sont des droites ; étudier :

a. Le cas (α).

On regarde F et F_1 comme des lignes de forces de deux champs (Φ) et (Φ_1) , les forces Φ et Φ_1 étant égales aux points correspondants ; on demande de remplacer la condition (α) par une autre équivalente que remplissent les travaux des forces dans deux mouvements correspondants sur S et S_1 .

b. Le cas (β) .

1° C et C_1 étant deux courbes homologues quelconques, qui passent respectivement par M et M_1 , que peut-on dire des points où les axes des cercles osculateurs de C en M et de C_1 en M_1 coupent respectivement les plans tangents à S et à S_1 ? (Il s'agit d'une propriété générale pour tout couple de surfaces applicables.)

2° C étant une trajectoire orthogonale des génératrices G , montrer qu'il existe deux développables formées respectivement de normales à C et à C_1 et qui coupent S et S_1 sous le même angle aux points M et M_1 correspondants.

IV. On suppose F et F_1 planes, mais courbes.

a. Pour le type (α) , l'énoncé III, a, reste valable.

b. Montrer l'impossibilité de la correspondance (β) .

[Il sera commode, ayant choisi des axes $M\xi\eta\zeta$ ⁽¹⁾ liés à la courbe F en chacune de ses positions, d'utiliser les projections, sur ces axes, du déplacement élémentaire d'un point mobile de S et en particulier de faire figurer les composantes δp , δq , δr de la rotation instantanée du trièdre $M\xi\eta\zeta$ sur ses trois arêtes. Même observation au sujet de F_1 et de S_1 .]

(1) Lire $M\xi\eta\zeta$ conformément aux notations du § V, a.

V. On suppose F et F_1 gauches.

a. Montrer que dans les deux cas (α) et (β) les tangentes à une même courbe F font partie d'un complexe linéaire.

Les déplacements élémentaires de deux trièdres $I\xi\eta\zeta$, $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, identiquement liés à F et à F_1 , ne diffèrent que par un mouvement hélicoïdal ayant le même axe que le complexe. En déduire le choix le plus simple des trièdres (I, I_1) relativement à S et S_1 simultanément.

b. La correspondance est du type (β) .

1° Relativement au trièdre $I\xi\eta\zeta$, les courbes F engendrent une surface Σ . Montrer que ces courbes ne peuvent constituer une famille d'asymptotiques de Σ .

2° Posant $\xi = r \cos \omega$, $\eta = r \sin \omega$ ⁽¹⁾, on prend pour paramètres de Σ , ω et t , t étant constant sur F .

Montrer que, si $\nu = \tan \omega$, Σ est surface intégrale de l'équation

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{d\xi}{d\nu}} [x + \beta\nu - \zeta(\gamma + \delta\nu)] \quad (2).$$

x, β, γ, δ étant des fonctions de t seul.

(1) Lire $\eta = r \sin \omega$ ou, mieux encore, pour éviter toute confusion avec les notations $\delta p, \delta q, \delta r$ du § IV, b , lire

$$\xi = \rho \cos \omega, \quad \eta = \rho \sin \omega,$$

(ξ, η, ζ) désignent les coordonnées polaires du point M par rapport au trièdre $I\xi\eta\zeta$; (ρ, ω, ζ) sont les coordonnées semi-polaires du même point.

(2) Remplacer la lettre ν par la lettre v ($v = \tan \omega$). Conformément aux notations de Poincaré, le d droit est utilisé dans cette équation pour désigner des dérivées partielles; dans la solution, j'ai rétabli le ∂ de ronde.

Montrer l'existence d'intégrales complètes correspondant aux droites du complexe auquel F appartient.

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Remarque préliminaire. — Je commencerai par rendre hommage à l'élégance intrinsèque du sujet; je me permettrai une remarque relative, non pas au fond, mais exclusivement à la forme.

Le n° III comporte la phrase :

(β) si (L) les rend superposables, mais non pas superposées.

Je préférerais une rédaction analogue à celle-ci :

(β) si (L) les rend applicables, en écartant le cas banal où S_1 est égale à S ou à une symétrique de S.

L'énoncé officiel donne au mot *superposables* le sens réservé d'habitude au mot *applicables*. Il me paraît difficile de ne pas admettre que les surfaces représentées par les formules respectives

$$\begin{aligned} (S) \quad x &= f(u, v), & y &= \varphi(u, v), & z &= \psi(u, v), \\ (S_1) \quad x_1 &= f(u, v) + a, & y_1 &= \varphi(u, v) + b, & z_1 &= \psi(u, v) + c \end{aligned}$$

(u, v paramètres variables; a, b, c constantes numériques non nulles ensemble) sont *superposables*, mais non *superposées*. Si même on consent à laisser au mot *superposables* le sens que l'énoncé officiel lui attribue, on arrive à cette conclusion qu'une surface S, dépourvue de plan ou centre de symétrie, et la symétrique S_1 de S par rapport à l'origine sont *superposables*, mais non *superposées* (toujours au sens de l'énoncé officiel);

or on doit évidemment exclure une telle solution, et c'est bien l'esprit, sinon la lettre, de l'énoncé.

I. Sur S on trace un système arbitraire de coordonnées curvilignes (u, v) ; sur S_1 on trace les courbes homologues et l'on exprime les coordonnées des points homologues M et M_1 en fonction de u et v . Avec les notations usuelles, les éléments linéaires sont

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ ds_1^2 &= E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2. \end{aligned}$$

Les courbes pour lesquelles les arcs homologues ont la même longueur constituent *en général* deux familles à un paramètre définies par l'équation différentielle du premier ordre

$$(E - E_1) du^2 + 2(F - F_1) du dv + (G - G_1) dv^2 = 0.$$

Il y a trois cas à distinguer :

1° Le cas, *normal* si S et S_1 sont quelconques ainsi que la loi (L) , où l'expression

$$\Delta \equiv (E - E_1)(G - G_1) - (F - F_1)^2$$

n'est pas nulle; les deux familles sont distinctes; suivant le signe de Δ elles sont, au voisinage d'un point réel, soit réelles soit imaginaires conjuguées. L'énoncé exclut définitivement pour la suite ce premier cas.

2° Le cas, *exceptionnel* au sens déjà employé, où les deux familles se confondent en une seule; cette famille est réelle; on peut supposer que c'est la famille $u = \text{const.}$; on aura

$$F = F_1, \quad G = G_1, \quad E \neq E_1.$$

Je désigne ce cas par la lettre (A) ; l'énoncé donne plus bas le sous-cas (α) de (A) , où les courbes

homologues sont de plus *égales chacune à chacune*.

3° Le cas, encore plus exceptionnel, où il y a *une infinité de familles dont les arcs se conservent* ; on a

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1$$

Une courbe *quelconque* et son homologue ont même longueur ; les deux surfaces sont *applicables*. Je désigne ce cas par la lettre (B) ; l'énoncé donne plus bas le sous-cas (β) de (B), où il existe *une* famille à un paramètre dont les courbes homologues sont *égales chacune à chacune*. (B) peut être considéré comme un cas particulier de (A).

II. On peut écrire

$$(1) \quad ds^2 = \frac{1}{G} [(G dv + F du)^2 + (EG - F^2) du^2].$$

L'équation différentielle

$$(2) \quad G dv + F du = 0$$

définit les trajectoires orthogonales des courbes $u = \text{const.}$ Dans les cas (A) ou (B) ces trajectoires se conservent.

Réciproquement, si la loi (L) :

1° conserve la longueur des courbes $u = \text{const.}$;

2° conserve les trajectoires orthogonales de ces mêmes courbes,

on a d'après 1°, puis 2°, successivement

$$G = G_1, \quad \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1},$$

d'où finalement

$$G = G_1, \quad F = F_1$$

et la loi (L) est une loi (A) ou (B).

III. Restons d'abord dans l'hypothèse (A), plus large que l'hypothèse (α). La tangente à la courbe $u = \text{const.}$, orientée dans le sens des v croissants, a pour cosinus directeurs

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

où $\sqrt{G}$ est pris positivement ; sur cette tangente ainsi orientée appliquons en M une force d'intensité $\Phi(u, v)$. Nous avons ainsi défini un champ (Φ) dans toute l'étendue de S. Le travail élémentaire de Φ pour un déplacement élémentaire *quelconque* de M sur S est

$$(3) \quad \frac{\Phi}{\sqrt{G}} \left[dx \frac{\partial x}{\partial v} + dy \frac{\partial y}{\partial v} + dz \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \frac{\Phi}{\sqrt{G}} (F du + G dv).$$

Sur S_1 définissons le champ analogue (Φ_1), les forces Φ et Φ_1 étant égales aux points correspondants. On voit immédiatement que la condition (A) peut être remplacée par l'égalité des travaux élémentaires correspondants et réciproquement : *a fortiori* si (A) est remplacé par le sous-cas (α) et encore plus *a fortiori* si (§ III, α) on suppose que F et F_1 sont des droites. Nous avons aussi vérifié que l'énoncé actuel est valable pour IV, α .

Imaginons maintenant réalisée l'hypothèse (B), plus large que l'hypothèse (β). Une courbe C de S, issue de M, a R pour rayon de courbure en M ; le plan osculateur à C en M fait l'angle θ avec la normale en M à S ; on sait que l'expression $\frac{\sin \theta}{R}$, ou *courbure géodésique*, est un invariant dans l'applicabilité de deux surfaces ; d'ailleurs $\frac{R}{\sin \theta}$ est la distance, au point M, du point où l'axe du cercle osculateur perce le plan tangent en M à S : *donc cette distance se conserve*. Il sera intéressant de démontrer rapidement

et directement cette propriété dans le cas particulier de (B) où les courbes F et F_1 sont rectilignes : ceci va être fait à l'instant de façon à traiter du même coup III, 2°.

Plaçons-nous donc dans les conditions III, 2°. La normale N à la surface S au point M fait avec la normale principale de la courbe C l'angle θ déjà défini ; la normale N' à C engendre une surface développable et fait avec la normale principale de C un angle V défini par la formule bien connue (facile d'ailleurs à retrouver par la méthode ci-dessous)

$$V = \int \frac{ds}{T},$$

où T est le rayon de torsion de C ; l'angle (N, N') est donc égal à $|V - \theta|$; la développable lieu de N' coupe la surface S sous l'angle complémentaire de (N, N') . La différentielle de $V - \theta$ est

$$\frac{ds}{T} - d\theta.$$

On retombe ainsi sur la *torsion géodésique* de la courbe C considérée comme tracée sur S . Je cite, pour mémoire, la formule, que les spécialistes eux-mêmes sont contents de retrouver dans les ouvrages spéciaux,

$$(4) \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} D du + D' dv & D' du + D'' dv \\ E du + F dv & F du + G dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2} (E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}.$$

Ici, S est réglée, les courbes $u = \text{const.}$ sont rectilignes, donc $D'' = 0$.

La courbe C est l'une des trajectoires orthogonales des génératrices, de sorte que $F du + G dv$ reste nulle

tout le long de C ; on a donc le long de C

$$(5) \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D' du (E du + F dv)}{\sqrt{EG - F^2} (E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}.$$

Or, tenant compte de la relation $F du + G dv = 0$, la formule (5) prend la forme plus simple

$$(5') \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$$

où R_1, R_2 sont les rayons principaux de S au point uv ; cela résulte de ce que l'expression invariante $DD'' - D'^2$ se réduit à $-D'^2$, de sorte que D' conserve la même valeur absolue (remarquons en passant qu'une symétrie plane change le signe de D, D'). Cela suffit à montrer que

$$\frac{d}{ds} |V - \theta| = \frac{d}{ds} |V_1 - \theta_1|.$$

- En remplaçant une normalie de C par une autre, on
 • augmente tous les angles V d'une même constante : on peut donc associer une à une les normalies de C et C_1 de sorte qu'elles coupent respectivement S et S_1 sous le même angle le long de C ou C_1 .

Démontrons maintenant directement, pour le cas spécial de deux surfaces réglées applicables, que l'expression $\frac{\sin \theta}{R}$ est un invariant *pour une courbe quelconque* et que l'expression $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ est un invariant *pour une trajectoire orthogonale des génératrices*.

Soit une courbe (C) dont les coordonnées d'un point variable x_0, y_0, z_0 sont exprimées au moyen de l'arc s de cette courbe ; a, b, c désigneront les cosinus directeurs de la tangente ; a', b', c' ceux de la normale principale ; a'', b'', c'' ceux de la binormale. Nous supposons que (C) soit directrice d'une surface réglée ;

les paramètres directeurs (principaux ou non) de la génératrice sont de nouvelles fonctions l, m, n de l'arc s ; les équations paramétriques de la surface réglée sont

$$(6) \quad x = x_0 + l\nu, \quad y = y_0 + m\nu, \quad z = z_0 + n\nu,$$

et l'on trouve aisément pour l'élément linéaire dS^2 de la surface réglée (l', m', n' désignant $\frac{dl}{ds}, \frac{dm}{ds}, \frac{dn}{ds}$)

$$(7) \quad dS^2 = A\nu^2 + 2B\nu + C) ds^2 + 2(P\nu + Q) ds d\nu + G d\nu^2$$

où l'on a ⁽¹⁾

$$(8) \quad \begin{cases} A = l'^2 + m'^2 + n'^2, & P = ll' + mm' + nn', \\ B = al' + bm' + cn', & Q = al + bm + cn, \\ C = 1, & G = l^2 + m^2 + n^2. \end{cases}$$

Faisons apparaître l'angle θ déjà défini : les cosinus directeurs de la normale N à la surface sont évidemment

$$a' \cos \theta + a'' \sin \theta, \quad b' \cos \theta + b'' \sin \theta, \quad c' \cos \theta + c'' \sin \theta.$$

Le vecteur l, m, n peut évidemment être défini comme la résultante d'un vecteur unité porté sur celle des normales à la courbe (C) qui est normale à N et d'un vecteur λ porté par la tangente à (C); on a alors

$$l = a\lambda - a' \sin \theta + a'' \cos \theta, \quad m = b\lambda - b' \sin \theta + b'' \cos \theta, \\ n = c\lambda - c' \sin \theta + c'' \cos \theta.$$

puis, par les formules de Serret-Frenet,

$$l' = a \left(\frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds} \right) + a' \left[\cos \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda}{R} \right] \\ + a'' \sin \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right),$$

(¹) Il n'y aura pas confusion entre la courbe (C) et le coefficient C qui figure dans dS^2 .

d'où l'on déduit

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \left(\frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \\ \quad + \frac{2\lambda}{R} \cos \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda^2}{R^2}, \\ B = \frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds}, \quad C = 1, \\ P = \lambda \frac{d\lambda}{ds}, \quad Q = \lambda, \quad G = \lambda^2 + 1. \end{array} \right.$$

Si donc la surface réglée S se déforme (au sens de Gauss) de sorte que les génératrices restent rectilignes, nous appellerons (C_1) la courbe homologue de (C) de sorte qu'aux points homologues les valeurs de s sur les deux surfaces S et S_1 soient les mêmes; mais alors la fonction $|\lambda|$, qui représente la cotangente de l'angle de C avec la génératrice, se conserve en passant de S à S_1 : en changeant simultanément, si c'est nécessaire, le signe de λ et ν sur S mais non sur S_1 , on peut supposer que c'est λ lui-même qui se conserve; mais alors la fonction ν doit prendre aussi la même valeur aux points homologues, puisque $\nu \sqrt{\lambda^2 + 1}$ représente le segment porté sur la génératrice à partir de C ⁽¹⁾. Alors la comparaison des dS^2 prouve que les deux expressions

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta}{R}, \\ \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{2\lambda}{R} \cos \theta \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda^2}{R^2} \end{array} \right.$$

(1) Le raisonnement du texte laisserait à la rigueur admettre l'hypothèse $\nu_1 = -\nu$ plutôt que $\nu_1 = \nu$. Mais les égalités $A\nu^2 + 2B\nu = A_1\nu_1^2 + 2B_1\nu_1$ et $\left(\nu \frac{d\lambda}{ds} + 1\right) d\nu = \left(\nu_1 \frac{d\lambda}{ds} + 1\right) d\nu_1$ qui doivent avoir lieu, *quel que soit s*, ne permettent que $\nu_1 = \nu$.

se conservent en passant de S à S_1 : ces deux expressions ne font intervenir que la courbe C et l'angle de C avec la génératrice.

La *courbure géodésique* se conserve donc pour une *courbe quelconque* ; si maintenant C est *trajectoire orthogonale des génératrices*, on a $\lambda = 0$ et le *carré de la torsion géodésique* se conserve. Ce sont les résultats que nous voulions établir directement pour les surfaces réglées, en nous plaçant au point de vue du candidat qui n'a pas de formulaire à sa disposition et ne peut se rappeler une formule relativement compliquée ; pour le chercheur, il y a souvent avantage à se servir aussi de la formule (4) indiquée précédemment pour mémoire.

Ajoutons un mot : en retranchant du second élément indiqué plus haut comme invariant, la quantité elle-même invariante $\lambda^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$, on obtient l'invariant plus simple

$$(11) \quad \left| \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \lambda \frac{\cos \theta}{R} \right|;$$

on vérifie aisément que l'expression (11) reproduit encore le second membre de (5'), même si $\lambda \neq 0$.

IV. La question IV, *a*, a été résolue comme cas très particulier de l'hypothèse (A).

La question IV, *b*, se résout immédiatement en remarquant que si deux surfaces applicables S et S_1 , *quelconques*, possèdent *une seule courbe plane*, C sur S et C_1 sur S_1 , telles que C et C_1 soient égales (les points homologues de C et C_1 dans leur superposition se correspondant aussi dans l'applicabilité), les deux surfaces S et S_1 sont, ou égales, ou l'une égale à une symétrique de l'autre. En effet, portons C sur C_1 de façon à réaliser leur superposition ; aux

points homologues, $\frac{\sin \theta}{R}$ a la même valeur, d'après la théorie de l'applicabilité des surfaces ; d'autre part $R = R_1$, donc $\sin \theta = \sin \theta_1$; si $\theta = \theta_1$, les deux surfaces S et S_1 coïncident comme admettant même développable circonscrite le long de C ; si $\theta + \theta_1 = \pi$, les deux surfaces S et S_1 sont symétriques par rapport au plan de C . On a donc obtenu la solution banale que l'esprit de l'énoncé demande d'écarter.

Si C est rectiligne, le raisonnement est en défaut. Si C est gauche, on n'a pas $\theta = \theta_1$, mais $\theta + \theta_1 = \pi$ et cette seconde solution $\theta + \theta_1 = \pi$ permet justement d'obtenir ce que demande la question V.

V. Soient donc la surface S et les courbes $F, F', F'', \dots$ tracées sur S , qui, dans la déformation de S , ne subissent aucune déformation, mais ont simplement leurs positions relatives changées. Traçons sur S une courbe quelconque Φ rencontrant $F, F', F'', \dots$ aux points $M, M', M'' \dots$ et soit t un paramètre permettant d'individualiser $M, M', M'', \dots$ sur Φ .

Traçons maintenant une courbe $\bar{\Phi}$ *quelconque* et établissons une correspondance ponctuelle bien déterminée entre Φ et $\bar{\Phi}$: autrement dit les coordonnées $\bar{M}_i$ du point homologue de M_i sont *trois* fonctions complètement arbitraires de t_i . Transportons la courbe $F^{(i)}$ de façon que le point M_i vienne en $\bar{M}_i$; *trois* nouvelles fonctions de t_i , complètement arbitraires aussi, permettent d'orienter la courbe transportée $F^{(i)}$ autour de $\bar{M}_i$; cela posé, la surface S a été transformée en une surface Σ dépendant des *six fonctions arbitraires d'une variable* définies à l'instant : les courbes $F^{(i)}$ sont restées inaltérées, leur disposition relative a seule varié

Sur la surface Σ que nous rapporterons à un trièdre $I\xi\eta\zeta$ on peut prendre pour lignes de coordonnées $t = \text{const.}$ les courbes $F^{(i)}$ transportées de sorte que les équations paramétriques de Σ sont

$$(12) \quad X = \xi(t, v), \quad Y = \eta(t, v), \quad Z = \zeta(t, v),$$

v désignant un paramètre dont la variation, pour t constant égal à t_i , donne la courbe $F^{(i)}$ transportée. Les équations paramétriques de la surface S sont donc

$$(13) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \\ y = y_0 + \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta, \\ z = z_0 + \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta, \end{cases}$$

où $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma''$ sont 12 fonctions de t seul; l'interprétation de ces 12 fonctions est aisée. Imaginons le trièdre $I\xi\eta\zeta$ lié à Σ : considérons le paramètre t comme représentant le temps et déplaçons $I\xi\eta\zeta$ par rapport à un trièdre fixe $Oxyz$ de façon qu'à l'instant t , les coordonnées x_0, y_0, z_0 dans le système $Oxyz$ soient celles de I et que α, β, γ soient les cosinus directeurs de $I\xi$ par rapport à Ox, Oy, Oz ; α', β', γ' ceux de $I\eta$, $\alpha'', \beta'', \gamma''$ ceux de $I\zeta$: le mouvement du trièdre $I\xi\eta\zeta$ dépend donc du seul paramètre t ; à l'instant t_i nous ne prenons de Σ que la courbe t_i et alors la surface S est le lieu de cette courbe: la courbe $t = \text{const.}$ se déplace et se déforme donc par rapport au trièdre $I\xi\eta\zeta$ de façon à engendrer Σ dans ce trièdre mobile et, en composant ces déplacements et déformations *relatifs* avec le mouvement d'*entraînement* de $I\xi\eta\zeta$, la courbe engendre au contraire S . Le trièdre mobile $I\xi\eta\zeta$ admet à l'époque t une rotation instantanée que nous projetons sur $I\xi, I\eta, I\zeta$ et nous appelons p, q, r suivant l'usage les composantes en question; le point I

possède à l'instant t une vitesse dont les composantes suivant $I \xi \eta \zeta$ seront représentées par λ, μ, ν .

Les relations

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx}{dt} \xi + \frac{d\alpha'}{dt} \eta + \frac{d\alpha''}{dt} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha'' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + \left(\alpha \frac{\partial \xi}{\partial v} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial v} + \alpha'' \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) dv, \\ dy &= \dots\dots\dots, \\ dz &= \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

donnent immédiatement les formules bien connues

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha dx + \beta dy + \gamma dz &= \left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \xi}{\partial v} dv, \\ \alpha' dx + \beta dy + \gamma' dz &= \left(\mu + r\xi - p\zeta + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv, \\ \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz &= \left(\nu + p\eta - q\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv, \end{aligned} \right.$$

et par suite l'élément linéaire de S est

$$(16) \quad ds^2 = F dt^2 + 2F dt dv + G dv^2$$

avec, en employant le symbole sommatoire S de Lamé,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= S \left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2, \\ F &= S \frac{\partial \xi}{\partial v} \left(\lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \\ G &= S \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Pour la surface S_1 le mouvement du trièdre $I \xi \eta \zeta$ sera défini par d'autres fonctions de t , $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$. (Nous rappelons que la donnée de $\lambda, \mu, \nu, p, q, r$ permet d'obtenir le mouvement par l'intégration d'une équation de Riccati et trois quadratures, et que le mouvement obtenu est *unique*.) En comparant les

éléments linéaires de S et S_1 on a, comme de juste, $G = G_1$; il n'y a donc qu'à écrire la relation $F = F_1$ si nous traitons d'abord la question V , a :

$$(18) \quad S(\lambda - \lambda_1) \frac{\partial \xi}{\partial v} + S(p - p_1) \left(\tau_1 \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) = 0$$

Si nous fixons t , ceci est l'équation d'un complexe linéaire contenant les tangentes de la courbe t considérée. Les droites du complexe sont les droites de moment nul par rapport au système de vecteurs dont les éléments de réduction en I sont :

résultante générale de translation : $p - p_1, q - q_1, r - r_1$,
moment résultant en I : $\lambda - \lambda_1, \mu - \mu_1, \nu - \nu_1$.

Considérons donc la courbe t sur S et l'axe du complexe ⁽¹⁾; nous avons laissé jusqu'ici indéterminé le déplacement que l'on inflige à chaque courbe t de S pour obtenir Σ ; il est loisible de transporter cette courbe t de façon que l'axe du complexe correspondant soit précisément $I\xi$; on aura donc

$$(19) \quad p = p_1, \quad q = q_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1.$$

L'équation $F = F_1$ s'écrit

$$(20) \quad (\nu - \nu_1) \frac{\partial \zeta}{\partial v} + (r - r_1) \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial v} - \tau_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) = 0.$$

(¹) Le système de vecteurs n'est pas réductible à un couple; sinon on aurait $p = p_1, q = q_1, r = r_1$ et la courbe F serait dans un plan perpendiculaire à l'axe du couple (cas écarté d'une famille de courbes planes, et même d'une seule). Le système de vecteurs n'est pas réductible à une force unique, sinon la courbe F serait encore plane, dans un plan passant par la force. Naturellement le cas où F est rectiligne est spécial, mais a été traité directement. Il peut d'ailleurs être traité comme cas particulier de V en réduisant la surface Σ à l'axe $I\xi$, on prend alors $p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \nu = \nu_1, \xi = \tau_1 = 0, \zeta = \nu$.

Nous devons remarquer que nous n'avons pas épuisé complètement les six fonctions arbitraires que nous avons à notre disposition pour fabriquer la surface Σ ; nous pouvons en effet, sans que la courbe F transportée cesse d'appartenir au complexe correspondant, faire tourner d'un angle arbitraire $\theta(t)$ cette courbe autour de Oz , la faire glisser d'une quantité arbitraire $Z(t)$, le long de Oz : ces opérations remplacent la surface Σ par une surface Σ' *différente*, laissent inaltérées p, q, λ, μ mais remplacent r, r_1, ν, ν_1 par

$$\begin{aligned} r' &= r + \frac{d\theta}{dt}, & r'_1 &= r_1 + \frac{d\theta}{dt}, \\ \nu' &= \nu + \frac{dZ}{dt}, & \nu'_1 &= \nu_1 + \frac{dZ}{dt}, \end{aligned}$$

la considération de l'équation $E = E_1$ montre qu'il y a intérêt à déterminer θ et Z par les quadratures

$$(21) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(r + r_1), \quad \frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{2}(\nu + \nu_1)$$

de façon que $r' + r'_1 = 0, \nu' + \nu'_1 = 0$. C'est le meilleur choix que l'on puisse faire de la surface auxiliaire Σ' , de sorte qu'en supprimant les accents on pourra supposer, aussi bien pour (α) que pour (β) ,

$$(22) \quad \begin{cases} p = p_1, & q = q_1, & r = -r_1, \\ \lambda = \lambda_1, & \mu = \mu_1, & \nu = -\nu_1. \end{cases}$$

Augmenter θ d'une constante est indifférent, cela ne fait que faire tourner Σ autour de $I\xi$; de même pour Z ; simple translation. Ce choix optimum a été obtenu par la remarque simple que les deux trièdres $I\xi\eta\zeta$ ou $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ ont des mouvements élémentaires différant d'un simple mouvement hélicoïdal $p - p_1, q - q_1, r - r_1; \lambda - \lambda_1, \mu - \mu_1, \nu - \nu_1$ de même axe que le

complexe. Je n'insisterai pas davantage sur le cas (α) qui est ainsi virtuellement épuisé.

Passons au type (β) . Les équations à résoudre sont

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (r - r_1) \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial v} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + (v - v_1) \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0, \\ (r^2 - r_1^2) (\xi^2 + \tau_1^2) + (v^2 - v_1^2) \\ + 2(r - r_1) \left[\mu \xi - \lambda \tau - (p \xi + q \eta) \zeta + \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] \\ + 2(v - v_1) \left(p \tau - q \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right.$$

quand on suppose simplement $p = p_1$, $q = q_1$, $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$; c'est la forme de cette dernière équation qui montre l'avantage des conditions $r + r_1 = 0$, $v + v_1 = 0$ de façon à n'avoir que le système réduit

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left(\xi \frac{\partial \tau}{\partial v} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + v \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0, \\ r \left[\mu \xi - \lambda \tau - (p \xi + q \eta) \zeta + \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tau \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] \\ + v \left(p \tau - q \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous voyons que la détermination de tous les couples de surfaces S , S_1 applicables possédant une famille de courbes homologues *égales* revient à la détermination des fonctions λ, μ, v, p, q, r de la seule variable t et des fonctions $\xi(t, v)$, $\eta(t, v)$, $\zeta(t, v)$ liées par les équations (24); il faut ensuite intégrer les deux équations de Riccati et effectuer les six quadratures correspondant aux mouvements de caractéristiques $(p, q, r, \lambda, \mu, v)$ et $(p, q, -r, \lambda, \mu, -v)$. On peut alléger ces opérations en se donnant les douze fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ qui figurent dans les relations (14) de façon à n'avoir plus que l'équation de Riccati et les trois quadratures

concernant le mouvement $(p, q, -r, \lambda, \mu, -\nu)$. En tout cas on remarquera que dans les équations (24) ne figurent que les rapports mutuels de $p, q, r, \lambda, \mu, \nu$: multiplier ces fonctions par une même fonction de t n'altère pas les trajectoires *géométriques*, mais revient à changer la loi des vitesses, chose indifférente au point de vue des couples S, S_1 . Maintenant il est clair, puisque les courbes F ne sont pas planes, que l'on peut passer des coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées semi-polaires ρ, ω, ζ par les formules

$$(25) \quad \xi = \rho(t, \omega) \cos \omega, \quad \eta = \rho(t, \omega) \sin \omega \quad \zeta = \zeta(t, \omega)$$

et prendre comme variables indépendantes t, ω ; ω joue donc le rôle de la variable ν restée jusqu'ici sans être précisée. L'emploi de ces coordonnées semi-polaires s'impose d'autre part par la remarque faite déjà, qu'augmenter tous les ζ d'une constante ou tous les ω d'une constante est indifférent pour Σ et le couple S, S_1 . La première équation (24) est remplacée par

$$(26) \quad \rho^2 = -\frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega},$$

de sorte que tout est ramené au calcul de ζ . On va constater qu'il est commode de faire un changement de variable indépendante sur ω seul et de poser

$$(27) \quad \nu = \tan \omega, \quad \frac{d\omega}{d\nu} = \cos^2 \omega,$$

on a

$$(28) \quad \xi = \rho \cos \omega = \sqrt{-\frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}}, \quad \eta = \rho \sin \omega = \nu \sqrt{\frac{-\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}}$$

et la seconde équation (24) devient, en se rappelant

que ω et t sont variables indépendantes,

$$(E) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial \zeta}{\partial v}} [\alpha + \beta v - \zeta(\gamma + \delta v)]$$

avec

$$(29) \quad \begin{cases} \alpha = \left(q - \frac{r}{v} \lambda\right) \sqrt{\frac{-v}{r}}, & \gamma = -\frac{pr}{v} \sqrt{\frac{-v}{r}}, \\ \beta = \left(\frac{r}{v} \lambda - p\right) \sqrt{\frac{-v}{r}}, & \delta = -\frac{qr}{v} \sqrt{\frac{-v}{r}}, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre fonctions de t seul : elles sont réelles toutes ou toutes imaginaires pures. Il est facile de voir que l'équation (E) admet une intégrale complète de la forme

$$(30) \quad \zeta = \frac{a + bv}{c + dv},$$

où a, b, c, d sont quatre fonctions de t seul ; les rapports mutuels de a, b, c, d intervenant seuls, nous pouvons supposer $bc - ad = 1$, de sorte que a, b, c, d soient réelles ou toutes imaginaires pures. On a en effet

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \frac{1}{(c + dv)^2}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{ca' - ac' + v(da' + cb' - bd' - ad') + v^2(db' - bd')}{(c + dv)^2} \end{cases}$$

et l'on est ramené à évaluer deux trinomes du second degré en v , d'où

$$(E_1) \quad \begin{cases} ca' - ac' = ac - a\gamma, \\ da' + cb' - bc' - ad' = \alpha d + \beta c - a\delta - b\gamma, \\ db' - bd' = \beta d - b\delta, \\ bc - ad = 1. \end{cases}$$

Les trois premières équations (E_1) s'écrivent

$$(31) \quad \frac{a' - \alpha}{a} = \frac{c' - \gamma}{c} = \frac{b' - \beta}{b} = \frac{d' - \delta}{d}.$$

La valeur commune de ces rapports s'obtient immédiatement en dérivant la dernière équation (E_1) et remplaçant ensuite a', b', c', d' par $\alpha + Ka$, $\beta + Kb$, $\gamma + Kc$, $\delta + Kd$. On a ainsi finalement à intégrer le système différentiel ordinaire à quatre fonctions inconnues a, b, c, d de t

$$(E_2) \quad \begin{cases} a' = \alpha + \frac{\alpha}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ b' = \beta + \frac{b}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ c' = \gamma + \frac{c}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ d' = \delta + \frac{d}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \end{cases}$$

dont on ne prend que les solutions à *trois* paramètres satisfaisant à $bc - ad = 1$. Donnant à l'un des paramètres une valeur numérique, on a l'intégrale complète de (E) qui permet l'intégration finale définitive par les méthodes classiques. L'intégrale complète ainsi obtenue donne une surface réglée Σ : car

$$\rho^2 = -\frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = -\frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

d'où

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{-v}{r}} \frac{1}{c \cos \omega + d \sin \omega}, \\ \zeta = \frac{a \cos \omega + b \sin \omega}{c \cos \omega + d \sin \omega}, \end{cases}$$

équations que l'on peut remplacer évidemment par

$$(33) \quad \begin{cases} \zeta = \sqrt{\frac{-r}{v}} (a\xi + b\eta), \\ c\xi + d\eta = \sqrt{\frac{-v}{r}}, \end{cases}$$

La courbe $t = \text{const.}$ sur Σ est donc une droite

(appartenant au complexe correspondant) : l'intégrale complète en question donne donc trois surfaces particulières associées S , S_1 et Σ qui sont réglées.

Il reste maintenant à démontrer que la surface Σ intégrale de (E) ne peut admettre les courbes F , *supposées gauches*, pour asymptotiques. L'équation

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial \omega} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = 0$$

jointe à sa dérivée par rapport à ω

$$\xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2} - \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} = 0$$

exprime que le plan des deux vecteurs *de direction distincte*

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega}, \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} \right)$$

admet pour normale la droite de paramètre $\left(-\tau, \xi, \frac{\nu}{r} \right)$. Ce plan est le plan osculateur de la courbe *gauche* F , nous n'avons fait que retrouver cette proposition classique que le plan osculateur de la courbe du complexe linéaire est en même temps plan focal du point d'osculation. Si F est asymptotique, ce plan, étant tangent à Σ , contient aussi l'autre tangente $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$ de sorte que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

et comme on a déjà remarqué que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} \equiv 0,$$

on a simplement $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, donc ζ ne dépend que de ω , la

surface Σ est donc un conoïde droit d'axe $I\zeta$ et les courbes F doivent donc être les asymptotiques autres que les génératrices horizontales de Σ ; l'équation (E), que nous avons étudiée, devrait donc admettre une intégrale satisfaisant à $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ et puisque $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$ ne saurait être nulle en même temps (sinon Σ serait plane, les courbes F et F_1 planes aussi, ce qui a été vu impossible), il faut que $\zeta = \frac{\alpha + \beta v}{\gamma + \delta v}$, cette dernière fraction étant indépendante de t , ce qui exige que les rapports mutuels de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soient indépendants de t ; remplaçons donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les constantes proportionnelles A, B, C, D et v par $\frac{\eta}{\xi}$: l'équation de la surface devient

$$\zeta = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta}.$$

C'est celle d'un parabolôïde équilatère, mais alors F serait encore rectiligne. Il y a donc contradiction. Ceci conduit aussi à étudier spécialement le cas où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont proportionnels à des constantes (donc constants en faisant un changement de variable sur t), mais ceci nous entraînerait trop loin.