

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3
(1924), p. 354-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__354_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Ox , Oy , Oz étant trois axes rectangulaires, à un point M de coordonnées (x, y, z) on fait correspondre le plan P représenté par l'équation

$$y(X - x) + x(Y - y) + k(x, y)(Z - z) = 0,$$

k ne dépendant que de x et y . Soit Γ une courbe gauche telle que le plan osculateur en l'un quelconque de ses points coïncide avec le plan P associé à ce point, et soit γ la projection de Γ sur le plan xOy .

1° La fonction $k(x, y)$ étant supposée donnée, former l'équation différentielle à laquelle satisfont les courbes γ . (On vérifiera que par un point quelconque du plan xOy passent deux courbes γ , soient γ_1 et γ_2 .)

2° Déterminer la fonction $k(x, y)$ de manière qu'il existe des surfaces S dont toutes les lignes asymptotiques soient des courbes Γ . Cela fait :

a. Trouver les surfaces S pour lesquelles les courbes γ_1 et γ_2 sont constamment confondues.

b. Trouver les surfaces S développables.

(Traiter a et b indépendamment l'un de l'autre.)

3° Déterminer $k(x, y)$ de manière que γ_1 et γ_2 soient constamment orthogonales; en particulier, de manière que les courbes γ_1 soient des cercles de centre O et les courbes γ_2 , leurs diamètres.

II. Trouver les fonctions monogènes analytiques

$$f(z) \equiv P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $x = x + iy$ telles que le rapport $\frac{Q}{P}$ ne dépende que de la variable y .

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{1 + \alpha \cos x} dx,$$

où α est un nombre réel compris entre 0 et 1 et m un entier.

(On cherchera, de préférence, à appliquer la méthode des résidus.)

Application numérique :

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad m = 2 \quad \text{et} \quad m = 10.$$

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° La caractéristique du plan P associé au point courant de Γ est contenue dans le plan

$$\begin{aligned} & y'(X - x) + x'(Y - y) \\ & + \left(\frac{\partial k}{\partial x} x' + \frac{\partial k}{\partial y} y' \right) (Z - z) - (yx' + xy' + kz') = 0, \end{aligned}$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre représentatif de Γ . Pour que cette caractéristique soit la tangente

de Γ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} yx' + xy' + kz' &= 0, \\ 2x'y' + \left(\frac{\partial k}{\partial x} x' + \frac{\partial k}{\partial y} y' \right) z' &= 0. \end{aligned}$$

On tire de là l'équation différentielle

$$\left(x \frac{dy}{dx} + y \right) \left(\frac{\partial k}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial k}{\partial x} \right) - 2k \frac{dy}{dx} = 0$$

qui définit les courbes γ ; cette équation une fois intégrée, les courbes Γ se déterminent par une quadrature.

2° Les surfaces S satisfont à l'équation aux différentielles totales

$$y dx + x dy + k(x, y) dz = 0.$$

Pour qu'elle soit complètement intégrable, on doit avoir

$$k = f(xy).$$

a. On a $(xyf' - f)^2 = x^2 y^2 f'^2$; d'où $f = a \sqrt{xy}$ (a const.).

b. Il faut $\frac{D}{D(x, y)} \left(\frac{k}{x}, \frac{k}{y} \right) = 0$, soit encore $2xyf' = f$, et l'on retrouve le résultat de a , comme il était évident *a priori*. Les surfaces S sont des cônes,

$$z = -2a \sqrt{xy} + \text{const.}$$

3° On trouve $k = \varphi(x^2 - y^2)$ et, dans le cas particulier,

$$\varphi = b \sqrt{x^2 - y^2} \quad (b \text{ const.}).$$

II Si l'on prend $P = YQ$, on trouve

$$Y \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad Y \frac{\partial Q}{\partial y} + Y' Q = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La condition d'intégrabilité donne

$$-Y' = a(Y^2 + 1), \quad \text{d'où} \quad Y = \cot a(y - y_0),$$

puis

$$Q = e^{a(x-x_0)} \sin a(y - y_0), \quad P = e^{a(x-x_0)} \cos a(y - y_0)$$

et

$$f(z) = e^{a(z-z_0)} \quad (a \text{ const. réelle}).$$

$$\text{ÉPREUVE PRATIQUE. — } I = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{-1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right)^m.$$

Application numérique. — $I_1 = 0,43634$; $I_2 = 0,000066504$.
