NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL LÉVY

Sur l'enseignement des notions relatives aux infiniment grands et aux infiniment petits dans la classe de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 3 (1924), p. 178-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__178_0>

SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOTIONS RELATIVES AUX INFINIMENT GRANDS ET AUX INFINIMENT PETITS DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;

PAR PAUL LÉVY.

Les examens d'admission à l'École des Mines m'ont donné l'occasion de constater l'extrême difficulté qu'ont la plupart des élèves, même des bons élèves, à résoudre les problèmes les plus simples dans lesquels interviennent les notions de quantités infiniment petites et infiniment grandes. Il y a un singulier contraste entre les résultats très médiocres obtenus en général sur ces questions et les résultats au contraire très satisfaisants obtenus pour d'autres parties du programme. En réfléchissant à cette circonstance, j'ai été conduit à penser qu'il ne fallait pas conclure que la notion d'infini dépassait ce que peuvent en général comprendre les élèves de Mathématiques spéciales, mais qu'on pourrait obtenir des résultats plus satisfaisants en modifiant les méthodes d'enseignement. Je serais heureux si les remarques qui suivent pouvaient décider certains des professeurs qui ne l'ont pas encore fait, à adopter des méthodes nouvelles.

L'idée directrice de ces remarques est qu'il faut toujours s'efforcer de mettre en évidence le véritable caractère des problèmes qui se posent, et, s'ils ne comportent pas de formules les résolvant dans tous les cas comme lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du second degré, ne pas remplacer l'exposé de la difficulté par une règle plus ou moins bien adaptée à la solution

de cette difficulté et que l'élève appliquera sans comprendre. Le souci de ne rien dire que de parfaitement précis explique l'apparition et l'abus de ces règles. Mais elles constituent un bâton d'aveugle donné à quelqu'un à qui l'on a mis d'abord un bandeau sur les yeux; sans doute en tâtant le sol avec son bâton évitera t-il toute chute; mais il n'atteindra le but que par hasard. Qu'on lui apprenne à ouvrir les yeux, à marcher vers le but, à ne pas trop craindre la chute, mais à savoir ensuite se relever, c'est-à-dire remplacer le raisonnement peu précis et parfois à moitié exact seulement dont il se sera d'abord contenté par un raisonnement rigoureux, ne prêtant à aucune objection et qui sera obtenu en général tout naturellement en précisant le raisonnement initial! Je pense d'ailleurs montrer dans la suite que les explications pouvant conduire à ce résultat comportent des règles aussi précises que celles que je voudrais remplacer.

A propos des infiniment petits, après avoir introduit la notion de l'ordre de grandeur relatif et celle de quantités équivalentes, la notion fondamentale, sur laquelle il y a lieu d'insister, est celle de la *valeur principale* d'une quantité infiniment petite ou infiniment grande, fonction d'un infiniment petit ou infiniment grand principal x. On entend généralement par là une expression de la forme cx^{α} équivalente a la fonction étudiée. Dans ce sens les quantités infiniment petites ou infiniment grandes n'ont pas toujours une valeur principale; on peut alors introduire la notion de *valeur principale généralisée*, expression aussi simple que possible équivalente à la fonction étudiée. Ainsi la fonction

$$\log(x+\log x)=\log x+\log\left(1+\frac{\log x}{x}\right)=\log x+\varepsilon$$

(x étant infiniment grand, et par suite ε infiniment petit) a pour valeur principale $\log x$, quantité qui ne peut pas être simplifiée et dont il faut savoir qu'elle croît moins rapidement que n'importe quelle puissance de x. L'intégrale

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \tag{1}$$

pour x infini (positif ou négatif, à condition dans ce dernier cas que la constante d'intégration soit choisie de manière que l'intégrale s'annule à l'infini), a pour valeur principale $\frac{e^x}{x}$, comme on le voit aisement par application de la règle de l'Hospital.

De la notion de valeur principale on passe à celle de développement en série, en écrivant la fonction étudiée sous la forme

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x),$$

chaque terme étant la valeur principale de l'erreur commise en prenant la somme des termes précédents comme valeur approchée de $f(x)$. Le reste $R_n(x)$ est alors infiniment petit par rapport à $u_n(x)$, et a pour valeur principale $u_{n+1}(x)$.

Il arrive souvent que ce développement puisse être poursuivi indéfiniment, et il importe de bien distinguer la notion de développement en serie ainsi comprise de la notion de série. Une série de fonctions peut ne pas constituer un développement en série, et un développement en série conserve tout son intérêt, au point de vue qui précède, même s'il donne lieu à une série divergente. Il ne serait peut-être pas inutile d'indiquer un exemple, tel que celui de l'intégrale (1), représentable à l'infini par le développement divergent

$$e^x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 2}{x^3} + \ldots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \ldots\right),$$

comme on le voit aisément en appliquant la règle de l'Hospital.

Les développements en séries sont souvent des développements suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit principal. La formule de Taylor montre qu'un tel développement est possible lorsque la fonction considérée admet des dérivées continues. Les fonctions usuelles vérifient toutes cette condition, sauf en certains points singuliers.

D'après cela, l'emploi de la formule de Taylor semblerait être le moyen naturel de former les développements en séries. On n'aurait qu'à calculer les dérivées successives. Mais en général on n'a à former ces développements en séries que pour des points particuliers, pour lesquels il y a des simplifications, et le meilleur moyen de calculer les premières dérivées est au contraire de former les premiers termes du développement en série. Les candidats devraient s'en souvenir lorsqu'on leur demande la tangente ou le rayon de courbure en un point remarquable d'une courbe.

De même qu'on étudie les principales fonctions usuelles pour apprendre à les dériver, il faut donc les étudier à nouveau au point de vue des développements en séries.

Cette étude est faite d'abord pour les fonctions rationnelles. C'est la théorie de la multiplication et de la division des polynomes. Il faut insister (plus qu'on ne semble le faire généralement) sur la simplicité du resultat lorsqu'on ne veut que la valeur principale de l'expression étudiée. La valeur principale d'un produit ou d'un quotient s'obtient en remplaçant chaque facteur par sa valeur principale. Les élèves savent rarement appliquer ce résultat.

Si l'on veut d'autres termes du développement en

série, il y a avantage à mettre d'abord en facteur la valeur principale; on n'a plus qu'à multiplier ou diviser des expressions dont le terme principal est l'unité. Si l'on se borne à chercher le second terme, on a

$$\frac{(1+ax+\ldots)(1+a'x+\ldots)}{(1+bx+\ldots)(1+b'x+\ldots)} = 1+(a+a'-b-b')x+\ldots,$$

formule que l'on devrait savoir appliquer sans hésiter. Si l'on veut un plus grand nombre de termes, on appliquera la théorie générale de la division, ou la formule qui donne $(1+bx)^{-1}$, ou plus généralement $(1+bx)^p$, s'il y a au dénominateur plusieurs facteurs identiques.

Il faut passer ensuite aux fonctions algébriques exprimables par radicaux. Si l'on n'est pas dans le voisinage d'un point singulier, c'est-à-dire d'un point où la quantité sous le radical est nulle ou infinie, la quantité à étudier se ramène nécessairement, après mise en facteur d'une constante convenable, à la forme $(1+\varepsilon)^\alpha$, où ε est infiniment petit; on peut la développer. L'on traitera ensuite le cas des points singuliers des mêmes fonctions; on est encore ramené à la forme $(1+\varepsilon)^\alpha$, mais cette fois après mise en facteur d'une puissance fractionnaire convenable de l'infiniment petit principal, de sorte que l'on a un développement suivant les puissances fractionnaires de cet infiniment petit; il ne rentre pas dans la formule de Taylor.

Passons à la fonction exponentielle. Le développement de e^ε, ε étant infiniment petit, est bien connu. Les élèves commettent souvent l'erreur d'appliquer la même formule à e^z, z étant une fonction de x qui n'est pas infiniment petite. La formule ainsi écrite

$$e^z = 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots.$$

est bien exacte, mais ne constitue pas un développe-

ment suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit $z - z_0 = \varepsilon$, et par suite de x. Il faut remplacer e^z par $e^{z_0} \times e^{\varepsilon}$. Le premier facteur est une constante, et le second se développe sans difficulté. En d'autres termes, c'est la formule de Taylor, et non celle de Maclaurin, qu'il faut appliquer.

Cela ne s'applique pas si l'exposant est infini. L'expression e^z, pour z infini, est une quantité d'un type nouveau dont il faut savoir qu'elle devient infinie plus rapidement que n'importe quelle puissance de l'exposant. Les élèves le savent, mais ils n'ont pas bien compris en général que c'est cette remarque qu'il faut utiliser, sans chercher aucun développement en série, lorsque l'exposant est infini, et qu'au contraire la méthode des développements en série s'applique lorsque l'exposant a une limite finie.

L'exposant z peut d'ailleurs être une fonction quelconque de x, et cela introduit des infiniment grands de types nouveaux, qu'il faut savoir classer les uns par rapport aux autres et par rapport à ceux déjà connus; ainsi il est évident que e^{x^2} l'emporte sur e^x (pour x infini positif); que e^{x^p} l'emporte de même sur e^{x^q} si $p > q$; que e^{e^x} l'emporte sur les quantités précédentes; au contraire $e^{(\log x)^2}$ croît moins rapidement que les quantités précédentes, mais l'emporte sur les puissances de x (comme on le voit en comparant les logarithmes de ces expressions).

Si z est de la forme $P(x) + \varepsilon$, $P(x)$ étant un polynome et ε une quantité infiniment petite, l'exponentielle a pour valeur principale $e^{P(x)}$, et en développant e^{ε} on obtient un développement en série généralisée; mais il faut éviter de dire qu'on développe $e^{P(x)}$; aucun développement ne peut donner une idée meilleure de la croissance de cette fonction.

Des remarques analogues s'appliquent si z devient infini pour une valeur finie de x. Soit par exemple à construire la courbe

$$y = f(x)e^z, \tag{2}$$

où $f(x)$ et z sont des fonctions rationnelles de x, cette dernière devenant infinie et changeant de signe pour $x = x_0$. L'infiniment petit principal serait

$$r - x_0 = \varepsilon;$$

mais il n'est pas utile de le mettre en évidence; il suffit de raisonner sur l'infiniment grand z. Les quantités $f(x)$ et ε étant des fonctions algébriques de z, leur valeur principale est une puissance de z, et l'exponentielle, l'emportant sur cette puissance, détermine la valeur limite non seulement de y, mais de $\frac{y}{x - x_0}$ et plus généralement de $\frac{y}{(x - x_0)^n}$. On a donc d'un côté une branche infinie, et de l'autre un point d'arrêt, sur l'axe des x, avec tangente horizontale. Les élèves savent quelquefois qu'il faut chercher les valeurs de x qui rendent l'exposant infini; mais ils croient toujours qu'il en résulte seulement une branche infinie. Ils ignorent absolument cette circonstance très générale du point d'arrêt avec tangente horizontale, et la difficulté avec laquelle ils trouvent en général cette tangente prouve qu'on n'insiste pas encore assez sur les applications de cette formule : l'exponentielle l'emporte sur les puissances de l'exposant.

Les constructions de courbes, qui obligent à se débrouiller dans des conditions assez variées, ont une grande valeur pédagogique (sans parler de leur valeur pour l'examinateur qui y trouve un grand nombre de questions diverses, et qui peut mettre le candidat aux

prises avec des difficultés qui doivent lui être familières, sans qu'il puisse en avoir la solution par une formule unique, apprise par cœur, et applicable dans tous les cas). Il ne faut pas craindre d'insister sur les constructions de courbes au détriment de parties moins utiles du cours, et il semble qu'un ou deux exemples de courbes du type (2) devraient trouver place dans le cours ou dans les exercices traités en classe.

Passons à la fonction $\log z$. Si z_0 est la valeur de z pour $x = x_0$, on pose $z = z_0(1+\eta)$, et la formule

$$\log z = \log z_0 + \log(1+\eta)$$

donne le développement cherché. Si z est nul ou infini au point x_0, ce point est un point singulier, et l'on ne peut pas avoir un développement ordinaire; mais si z a une valeur principale de la forme $a\varepsilon^p$ (en posant toujours $\varepsilon = x - x_0$), on posera $z = a\varepsilon^p(1+\eta)$, et la formule

$$\log z = p\log\varepsilon + \log a + \log(1+\eta)$$

donne un développement en série généralisé, dans lequel le premier terme constitue un infiniment grand d'un type nouveau, croissant moins rapidement que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$. Des remarques analogues s'appliquent naturellement lorsqu'on a à étudier l'allure de $\log z$ pour x infini. Si z a pour valeur principale ax^p, on posera $z = ax^p(1+\eta)$.

Tout ce qui vient d'être dit pour les fonctions exponentielles et logarithmiques peut être répété pour les fonctions circulaires directes et inverses. Ainsi les développements de $\cos z$ et $\sin z$ sont bien connus si z est infiniment petit; si z a une limite z_0, on posera $z = z_0 + \varepsilon$, on utilisera les formules

$$\cos(z_0+\varepsilon) = \cos z_0\cos\varepsilon - \sin z_0\sin\varepsilon,$$
$$\sin(z_0+\varepsilon) = \sin z_0\cos\varepsilon + \cos z_0\sin\varepsilon,$$

et l'on remplacera $\cos\varepsilon$ et $\sin\varepsilon$ par leurs développements.

La plupart des expressions que l'on peut donner à étudier aux élèves de Mathématiques spéciales sont des combinaisons des fonctions dont nous venons de parler. Une mention spéciale doit être faite pour l'expression u^v, qui n'est pas de cette forme, mais s'y réduit si l'on écrit $e^{v\log u}$.

Cela n'est d'ailleurs pas un artifice. La théorie des logarithmes a précisément pour objet de faciliter le calcul des expressions où figurent des objets et des exposants. C'est ne pas l'avoir comprise que d'hésiter à l'utiliser lorsqu'on a une difficulté avec une expression de la forme u^v. Écrire $y = e^{v\log u}$ a l'air d'un artifice, et cela plaît aux élèves. Je préfère, surtout si les calculs à effectuer sont un peu compliqués, que l'on prenne franchement les logarithmes en écrivant

$$\log y = v\log u,$$

et, qu'une fois les transformations nécessaires effectuées, on remonte du logarithme au nombre.

L'ignorance des élèves, même des bons élèves, est prodigieuse dès qu'il s'agit d'utiliser les logarithmes comme il vient d'être indiqué. D'abord ils s'imaginent souvent que pour avoir la valeur principale de y il suffit d'avoir la valeur principale de $\log y$. Pourtant il n'est pas difficile de comprendre qu'il s'agit d'arriver à une formule de la forme

$$y = y_1 e^{\varepsilon},$$

y_1 étant la valeur principale cherchée et ε une quantité infiniment petite. La formule précédente s'écrivant

$$\log y = \log y_1 + \varepsilon,$$

on voit qu'il s'agit de calculer $\log y$ avec une erreur infiniment petite.

Ensuite il s'agit de remonter du logarithme au nombre. Les élèves devraient savoir sans hésiter que

$$\log y = \alpha \log a + \beta \log b - \gamma \log c + \varepsilon$$

donne

$$y = \frac{a^\alpha b^\beta}{c^\gamma} e^\varepsilon.$$

Beaucoup écrivent pour y une somme au lieu d'un produit. Lorsqu'ils ont évité ou corrigé cette erreur, ils laissent chaque facteur sous la forme $e^{\alpha \log a}$; il n'y a pas un élève sur cent qui ait spontanément l'idée de remplacer cette expression par a^α. Cela se rattache d'ailleurs à une circonstance assez générale : ils ne savent pas qu'il faut constamment au cours d'un calcul rechercher les simplifications qui se produisent, des expressions très simples se présentant souvent sous une forme très compliquée. Dans la composition de géométrie analytique donnée cette année au concours d'admission de l'École des Mines, la moitié des élèves ont été arrêtés presque au début parce qu'ils n'ont pas remplacé $\frac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$ par e^{-x}, ce qui a remplacé, pour la suite, des calculs très simples par des calculs inextricables. Mais dans le cas indiqué il y a autre chose; ils ne sont pas assez familiarisés avec cette double opération : prendre le logarithme, puis remonter du logarithme au nombre. Ils savent sans doute le faire s'il s'agit de calculs numériques; ils en deviennent incapables dès qu'il s'agit de formules d'analyse.

Ce qui précède m'amène à parler des expressions indéterminées qui se présentent sous la forme u^v. L'idée naturelle, d'après ce qui précède, qu'il s'agisse d'expressions de la forme 1^∞, ∞^0, ou 0^0, est de prendre

les logarithmes. On est toujours ramené à la forme plus simple $0 \times \infty$.

Un artifice dont on abuse, lorsqu'il s'agit de la première de ces formes, consiste à écrire

$$(1+\alpha)^{\beta} = \left[(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\beta} \to e^{\alpha\beta}.$$

A quoi bon? N'arrive-t-on pas tout naturellement au même résultat en prenant les logarithmes, utilisant le fait connu que la valeur principale de $\log(1+\alpha)$ est α, puis remontant du logarithme au nombre?

En 1922, les candidats à l'École des Mines ont eu à trouver la valeur principale de l'expression

$$u_n = \left(1 - \frac{p}{\log n}\right)^{\log^2 n},$$

et en déduire les conditions de convergence de la série de terme général u_n. Il suffisait, par application des principes qui précèdent, d'écrire

$$\log u_n = \log^2 n \log\left(1 - \frac{p}{\log n}\right) = -p\log n - \frac{p^2}{2} - \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit pour n infini, d'où, en remontant du logarithme au nombre

$$u_n = \frac{1}{n^p} e^{-\frac{p^2}{2}} e^{-\varepsilon}. \tag{3}$$

La série est donc convergente si $p > 1$.

L'emploi de l'artifice que je combats a tout naturellement conduit les élèves à croire que la valeur principale de u_n était $e^{-p\log n}$, négligeant ainsi le facteur $e^{-\frac{p^2}{2}}$ (ce qui, heureusement pour eux, ne changeait pas les conditions de convergence). Parmi les 50 élèves (sur 400) qui ont pris les logarithmes,

40 environ sont arrivés finalement au même résultat erroné parce qu'ils ont cru qu'il suffisait de prendre la valeur principale de $\log u_n$. Ceux qui n'ont pas commis cette erreur ont échoué en général devant la question de la convergence parce qu'ils n'ont pas su remplacer $e^{-p\log n}$ par $\frac{1}{n^p}$. Si mes souvenirs sont exacts, un seul candidat a écrit correctement le résultat sous la forme (3).

Considérons maintenant les expressions indéterminées qui se présentent sous la forme d'une somme ou d'une différence de plusieurs quantités qui deviennent infinies. Ce qui est à retenir, en vue des applications, est ceci : on compare l'ordre de grandeur des différentes quantités en question; si l'une d'elles l'emporte sur les autres, l'expression totale devient infinie, le terme en question, qui est le terme principal, donnant son signe. S'il y a plusieurs termes principaux, on regarde d'abord si leurs valeurs principales se détruisent exactement; sinon, la difficulté est résolue. Si oui, on effectue des développements en série, que l'on poussera jusqu'au moment où l'on trouvera un terme non nul.

Que font les candidats? Ils cherchent à mettre un terme en facteur, et pas toujours le terme principal.

Sans doute cela est-il utile pour démontrer le théorème sur lequel repose la méthode qui précède. Mais à quoi bon recommencer la démonstration d'un théorème d'analyse chaque fois qu'on a à l'appliquer? Les candidats ne le font pas lorsqu'il s'agit d'un polynome; je ne conçois pas davantage qu'ils hésitent à donner la valeur principale, pour x infini, d'une expression telle que

$$x - \sqrt{x} - \log x.$$

Sans doute arrive-t-il, dans certaines questions d'analyse, que le résultat ne soit pas simple et que ce soit la méthode de calcul qu'il faille s'efforcer de retenir. Dans le cas indiqué c'est le contraire, et c'est le résultat simple auquel on aboutit que le professeur doit s'efforcer de mettre en évidence.

Il y a environ 20 ans, il y avait certains théorèmes que l'on n'avait pas le droit d'appliquer sans en répéter chaque fois leur démonstration. Je me souviens d'avoir été fort malmené par un répétiteur pour avoir écrit : « $x^2 = a^2$, donc $x = \pm a$ ». J'avais omis d'accomplir un rite sacré et je n'obtins mon pardon qu'en réparant bien vite mon erreur. Le même rite devait s'accomplir chaque fois qu'on appliquait les théorèmes concernant les limites; il fallait mettre en évidence la quantité ε telle que..., etc. De là les complications invraisemblables que l'on introduisait dans la démonstration si simple du fait que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tende vers e; j'ai pu constater cette année aux examens que ces complications étaient encore conservées par certains professeurs, et je n'ai jamais obtenu la démonstration véritablement simple, telle que je la conçois (qui diffère d'ailleurs assez peu de celle qu'on donne maintenant dans la plupart des classes de Spéciales).

J'ai voulu profiter de l'occasion qui se présentait pour combattre l'erreur qui consiste à interdire d'appliquer certains théorèmes sans en répéter la démonstration. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il faille rattacher à cette erreur celle que je signalais tout à l'heure concernant la forme indéterminée $\infty - \infty$, mais plutôt à un effort insuffisant pour comprendre et expliquer la véritable nature des questions où interviennent des quantités devenant infinies, et mettre en évidence ce

fait essentiel que certaines expressions infinies l'emportent sur d'autres.

(*A suivre.*)