

CH. RIQUIER

Sur l'enveloppe d'une famille de lignes à deux paramètres

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 50-61

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__50_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'3gγ]

**SUR L'ENVELOPPE
D'UNE FAMILLE DE LIGNES A DEUX PARAMÈTRES;**

PAR CH. RIQUIER.

1. Considérons, dans l'espace à trois dimensions, une famille de lignes dépendant des deux paramètres a, b , et définie (en coordonnées rectilignes) par le couple d'équations

$$f_1(x, y, z, a, b) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b) = 0;$$

ce couple est, naturellement, supposé résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites ⁽¹⁾, par rapport à l'un au moins des trois couples de coordonnées (y, z) , (z, x) , (x, y) . Cela étant, proposons-nous de rechercher *s'il existe quelque surface fixe ayant un contact proprement dit* ⁽²⁾ avec cha-

⁽¹⁾ Voir RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n^{os} 120, 121.

⁽²⁾ C'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro.

cune des lignes de la famille. Une pareille surface, si elle existe, se nommera *l'enveloppe* des lignes de la famille, et chacune de ces dernières se nommera elle-même une *enveloppée*.

I. Considérons une ligne et une surface représentées, la première, suivant le mode réduit, à l'aide du système

$$(1) \quad F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

la seconde, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(2) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

où u, v désignent deux variables auxiliaires.

Pour que, au point (u, v) de la surface (2), il y ait un contact proprement dit entre cette surface et la ligne (1), il faut et il suffit que l'on ait, pour les valeurs particulières considérées de u, v ,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ \quad + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0. \end{array} \right.$$

Effectivement, pour exprimer le contact spécifié par notre énoncé, il suffit d'écrire, d'abord, que le point (u, v) de la surface est situé sur la ligne (1), ce qui donne les deux premières relations (3), puis, que la tangente à la ligne est en symptose avec le plan tangent à la surface. Or, la tangente à la ligne a pour équations

$$\frac{X - x}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}},$$

et le plan tangent à la surface a pour équation

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(X - x) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(Y - y) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(Z - z) = 0;$$

la condition de leur symptose est donc la dernière relation (3).

II. Si l'on désigne par x, y, z trois fonctions des variables arbitraires u, v , telles que les deux fonctions composées (olotropes)

$$g_1(x, y, z, u, v), \quad g_2(x, y, z, u, v)$$

s'annulent identiquement, quels que soient u et v , on a aussi identiquement, quels que soient u et v ,

$$(4) \quad \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Effectivement, les identités supposées,

$$g_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad g_2(x, y, z, u, v) = 0,$$

entraînent manifestement les suivantes :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial v} = 0.$$

En tirant de ces dernières $\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial v}$, on a donc,

quels que soient u et v ,

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Or, d'après une formule connue de la théorie des déterminants, l'expression ainsi obtenue n'est autre chose que le second membre de la formule (4).

III. Revenons à la question qu'il s'agit de résoudre, et soient, comme plus haut,

$$(5) \quad f_1(x, y, z, a, b) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b) = 0$$

les équations qui définissent la famille de lignes donnée, dépendant des deux paramètres a et b . A chaque ligne particulière représentée par les équations (5), c'est-à-dire à chaque système de valeurs particulières de a , b , faisons correspondre, sur cette ligne, un point M,

$$(6) \quad X = \varphi(a, b), \quad Y = \chi(a, b), \quad Z = \psi(a, b),$$

suivant une loi provisoirement indéterminée, et cherchons à déterminer cette loi, c'est-à-dire les fonctions $\varphi(a, b)$, $\chi(a, b)$, $\psi(a, b)$, de telle sorte que le lieu des points M soit une surface tangente, en chacun de ces points, à la ligne particulière correspondante.

Observons à cet effet que la surface cherchée, si elle existe, est représentée par les formules (6), où a , b sont considérés comme des variables auxiliaires; et que, d'autre part, une ligne particulière de la famille (5) s'obtient en attribuant à a , b , dans les équations (5),

des valeurs constantes. Pour appliquer les formules (3) de l'alinéa I, nous devons donc, dans $f_1(X, Y, Z, a, b)$, $f_2(X, Y, Z, a, b)$, considérer comme des constantes les quantités a, b qui y figurent explicitement en dehors de X, Y, Z , et au contraire comme des variables celles qui y figurent implicitement par l'intermédiaire de X, Y, Z ; il viendra ainsi

$$\begin{aligned} f_1(X, Y, Z, a, b) = 0, \quad f_2(X, Y, Z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(Y, Z)} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(Z, X)} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(a, b)} \\ + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X, Y)} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(a, b)} = 0; \end{aligned}$$

ces relations devront être vérifiées quels que soient a et b . D'ailleurs, dans le système ainsi obtenu, la dernière relation, en vertu de l'alinéa II, pourra être remplacée par $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0$.

Nous avons donc, pour déterminer les trois fonctions inconnues, un système de trois équations, qui, après remplacement des notations X, Y, Z par les notations x, y, z , s'écrira

$$(7) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, a, b) = 0, & f_2(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0. \end{cases}$$

Pour que les lignes (5) aient une enveloppe, il faut et il suffit, ainsi que cela résulte des premières notions de Géométrie infinitésimale : 1° qu'à partir de quelque une des solutions numériques du système (7), regardée comme *fondamentale*, ce système soit résolvable par rapport à x, y, z conformément au principe général des fonctions implicites; 2° que, si l'on considère les formules de résolution

$$(8) \quad x = \varphi(a, b), \quad y = \chi(a, b), \quad z = \psi(a, b),$$

l'un au moins des trois couples

$$\chi, \psi; \psi, \varphi; \varphi, \chi$$

présente, par rapport à a, b , un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle, ou, ce qui revient au même, que l'un au moins des trois couples de formules extraits de (8) soit résoluble par rapport à a, b conformément au même principe.

En d'autres termes, si l'on considère le déterminant différentiel relatif à x, y, z du système (7), et les trois déterminants différentiels relatifs à a, b des formules (8), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro le premier de ces quatre déterminants et l'un au moins des trois derniers.

Lorsqu'il en est ainsi, les formules (8) définissent une véritable surface, cette surface fixe est tangente à chacune des lignes de la famille (5), et son point de contact avec la ligne (a, b) de la famille est fourni par les formules (8).

2. Si l'on a égard à la forme particulière du système (7), les conditions formulées ci-dessus pour l'existence d'une enveloppe des lignes (5) conduisent à l'énoncé suivant :

Considérons, en même temps que le système (7), les deux systèmes

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2 = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0, \end{array} \right.$$

extraits de (7).

Pour que les lignes (5) aient une enveloppe, il

faut et il suffit qu'à partir de quelque'une des solutions numériques du système (7), regardée comme fondamentale, ce système, d'une part, et l'un au moins des systèmes (9), (10), d'autre part, soient résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites, le premier par rapport à x , y , z , le second par rapport à a , b .

En d'autres termes, si l'on considère le déterminant différentiel relatif à x , y , z du système (7), et les déterminants différentiels relatifs à a , b des systèmes respectifs (9), (10), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro le premier de ces trois déterminants et l'un au moins des deux derniers.

La condition posée est nécessaire.

Effectivement, s'il existe une enveloppe, le système (7), résoluble par rapport à x , y , z , équivaut ⁽¹⁾ au système des formules de résolution (8), dont deux, les deux premières par exemple, sont elles-mêmes résolubles par rapport à a , b . Le système (8) est alors résoluble par rapport à a , b , z , donc aussi le système équivalent (7) ⁽²⁾, d'où résulte (en vertu de la théorie générale des déterminants) que deux des trois équations (7) sont résolubles par rapport à a , b ⁽³⁾; et comme, à cause de la troisième, les deux premières ne le sont certainement pas, l'un au moins des deux systèmes (9), (10) ne pourra manquer de l'être.

⁽¹⁾ RIQUIER. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 122.

⁽²⁾ *Ibid*, n° 133.

⁽³⁾ Si les trois déterminants différentiels relatifs à a , b du système (7) avaient des valeurs fondamentales à la fois nulles, le déterminant différentiel relatif à a , b , z du même système aurait aussi une valeur fondamentale nulle.

La condition posée est suffisante.

Effectivement, si on la suppose remplie, le système (7), résoluble par rapport à x, y, z , comprend deux équations résolubles par rapport à a, b , d'où résulte (en vertu de la théorie générale des déterminants) qu'il est résoluble par rapport à l'un au moins des trois groupes

$$a, b, x; \quad a, b, y; \quad a, b, z, \quad (1)$$

par exemple par rapport à a, b, z . Le système (8), équivalent à (7), est donc lui-même résoluble par rapport à a, b, z , ce qui exige que les deux premières formules (8) soient résolubles par rapport à a, b .

3. Au lieu de supposer, comme dans ce qui précède, que la famille de lignes dépendant des paramètres a, b se trouve définie, suivant le mode réduit, par le sys-

(¹) Si, dans le Tableau

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & c_5, \end{array}$$

a trois lignes et cinq colonnes, les deux dernières colonnes contiennent quelque déterminant du second ordre différent de zéro, et qu'en même temps leur association avec chacune des trois premières donne un déterminant du troisième ordre égal à zéro, il est aisé de voir que tous les déterminants du troisième ordre extraits du Tableau sont nuls, et notamment celui qui résulte de l'association des trois premières colonnes.

Il résulte de là que si, dans le Tableau différentiel relatif à x, y, z, a, b du système (7), les deux dernières colonnes contiennent quelque déterminant du second ordre à valeur fondamentale non nulle, et qu'en même temps son association avec chacune des trois premières donne un déterminant du troisième ordre à valeur fondamentale nulle, le déterminant du troisième ordre fourni par l'association des trois premières a lui-même une valeur fondamentale nulle.

tème (5), supposons qu'elle se trouve représentée, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(11) \quad x = \varphi(t, a, b), \quad y = \chi(t, a, b), \quad z = \psi(t, a, b),$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \chi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ne sont pas à la fois identiquement nuls.

Pour que la ligne variable (11) reste constamment tangente à une surface fixe, il faut qu'à chaque détermination de cette ligne variable on puisse faire correspondre sur elle un point M suivant une loi telle, que le lieu des points M soit une surface tangente, en un quelconque de ces points, à la ligne correspondante de la famille (11); telle, par suite, que, au point considéré, la tangente à la ligne et le plan tangent à la surface soient en symptose. En d'autres termes, il faut que, en remplaçant t par une fonction de a et b convenablement choisie, ce qui donnera sur chacune des lignes (11) un point M, les quantités, α , β , γ , qui dirigent la tangente en M à la ligne (11), et les quantités, A, B, C, qui dirigent le plan tangent au lieu cherché des points M, vérifient, quels que soient a et b , la relation $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Or, les quantités α , β , γ et A, B, C sont proportionnelles, les premières à

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \chi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

les dernières aux déterminants du second ordre extraits du Tableau

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}, & \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a}, & \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}, & \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b}, & \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b}; \end{cases}$$

on doit donc avoir, quels que soient a et b , la relation

$$(14) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \end{array} \right| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dots + \dots = 0,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$(15) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{array} \right| = 0 \quad (1).$$

Le premier membre de (15) est d'ailleurs la somme de quatre déterminants du troisième ordre, dont trois s'évanouissent identiquement comme ayant deux colonnes proportionnelles, et l'équation (15) prend dès lors la forme réduite

$$(16) \quad \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0.$$

Pour que les lignes (11) aient une enveloppe, il est évidemment nécessaire et suffisant : 1° qu'à partir de quelque solution numérique (fondamentale) de l'équation (16), cette dernière soit résoluble par rapport à t conformément au principe général des fonctions implicites; 2° qu'en remplaçant t dans le Tableau (13) par la valeur ainsi obtenue, les déterminants du second ordre extraits du Tableau résultant présentent des valeurs fondamentales non à la fois nulles, ou, ce qui

(1) Le premier membre de (14) n'est autre chose, en effet, que le déterminant du troisième ordre formé avec les lignes (13) et (12); en y permutant les lignes avec les colonnes, on tombe sur la forme (15).

revient au même, que l'un au moins des trois couples de formules extraits de (11) soit, après cette substitution, résoluble par rapport à a , b conformément au même principe.

Cette double condition peut encore se formuler comme il suit.

Considérons, en même temps que l'équation (16), les trois systèmes

$$(17) \quad \begin{cases} y = \chi(t, a, b), \\ z = \psi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} z = \psi(t, a, b), \\ x = \varphi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0; \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, a, b), \\ y = \chi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0, \end{cases}$$

dont chacun s'obtient en adjoignant à l'équation (16) deux équations extraites de (11).

Pour que les lignes (11) aient une enveloppe, il faut et il suffit qu'en choisissant convenablement une solution numérique (fondamentale) de l'équation (16), cette dernière, d'une part, et l'un au moins des systèmes (17), (18), (19), d'autre part, soient résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites, la première par rapport à t , le second par rapport à t , a , b .

En d'autres termes, si l'on considère la dérivée partielle relative à t du premier membre de (16), et les déterminants différentiels relatifs à t , a , b des

systèmes respectifs (17), (18), (19), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro cette dérivée partielle et l'un au moins de ces trois déterminants.