

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 391-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__391_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

EPREUVE THÉORIQUE. — *Mouvement d'un solide S homogène, pesant, de révolution, de centre de gravité G et d'axe Gz assujetti aux liaisons suivantes :*

Gz passe par un point fixe O.

G reste, sans pouvoir le quitter, sur un cylindre fixe de révolution autour de la verticale Oz_1 .

1° *Discuter le mouvement dans la seule hypothèse où la position initiale de Gz est horizontale, la vitesse initiale de S se réduisant à une simple rotation ω autour de Gz. Discuter tous les paramètres. Étudier en détail les diverses formes de la trajectoire de G.*

2° *γ étant un parallèle tracé à l'avance, au-dessous de O, sur le cylindre, déterminer l'intervalle dans lequel doit être ω pour que le mouvement considéré précédemment se fasse entièrement au-dessus de γ .*

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — Soient θ l'angle de Oz avec la verticale (ascendante) Oz_1 , ψ l'angle du plan zOz_1 avec un vertical fixe, φ l'angle de rotation du solide autour de son axe. Tenant compte des données initiales, on obtient, pour le

mouvement, les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi' + \psi' \cos \theta &= \omega, \\ (Mr^2 + A \sin^2 \theta) \psi' + C \omega \cos \theta &= 0, \\ (Mr^2 + A \sin^2 \theta) \left[\psi'^2 + \frac{\theta'^2}{\sin^2 \theta} \right] + Mgr \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit, pour déterminer θ , l'équation différentielle

$$\frac{[Mr^2 + A \sin^2 \theta]^2}{\sin^2 \theta} \theta'^2 + \cos \theta [Mgr(Mr^2 + A \sin^2 \theta) + C^2 \omega^2 \cos \theta] = 0,$$

et la discussion est immédiate.

Le parallèle γ étant déterminé par l'angle θ_0 ($> \frac{\pi}{2}$), la condition demandée dans la deuxième question est

$$\omega^2 > \frac{Mgr(Mr^2 + A \sin^2 \theta_0)}{-C^2 \cos \theta_0}.$$

(Bordeaux, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une droite homogène et pesante AA' , de longueur $2l$ et de masse m , peut tourner autour de la verticale ascendante Oz_1 , issue de son milieu O , en faisant un angle constant α avec cette verticale; soit φ l'angle du plan AOz_1 avec un plan vertical fixe x_1Oz_1 .

Un disque circulaire, homogène et pesant, de rayon R et de masse M , est assujéti à rester dans le plan vertical AOz_1 , et à rouler sans glisser sur la droite matérielle AA' , J étant le point de contact du disque, on pose $OJ = x$.

Les forces extérieures, appliquées au système, outre la pesanteur du disque et de la droite comprennent un système de forces appliquées à la droite AA' , se réduisant à un couple dont l'axe $\vec{H}$ est dirigé selon Oz_1 .

1° En prenant comme paramètres x et φ , écrire les équations différentielles du mouvement du système.

2° Déterminer, en fonction de x et de $\frac{dx}{dt}$, la mesure H de l'axe du couple, de façon que le plan AOz_1 tourne

d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire donnée autour de Oz_1 :

$$\dot{\varphi}' = \omega.$$

3° Cette condition étant réalisée, intégrer l'équation du mouvement du disque sur AA' , en donnant l'expression de x en fonction de t .

4° En supposant toujours $\dot{\varphi}' = \omega$, soit $\vec{R}$ la réaction de la droite AA' , sur le disque, calculer en fonction de t les projections R_x, R_y, R_z de $\vec{R}$ sur un trièdre mobile Ox, y, z ainsi défini :

Ox coïncide avec la demi-droite OA ; Oy est situé dans le plan AOz_1 , normal vers le haut à Ox ; Oz est normal au plan AOz_1 de façon que le trièdre soit direct.

Nota. — On supposera dans le problème que le disque n'atteint pas les extrémités A ou A' de la droite.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — La force vive du système est

$$2T = \frac{3}{2} M x'^2 + m \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}'^2 + M \left[(x \sin \alpha - R \cos \alpha)^2 + \frac{R^2}{4} \right] \dot{\varphi}'^2.$$

La fonction des forces de la pesanteur est par ailleurs

$$U = -M \cdot g(x \cos \alpha + R \sin \alpha).$$

Les équations de Lagrange donnent les équations du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} M x'' - M \sin \alpha (x \sin \alpha - R \cos \alpha) \dot{\varphi}'^2 = -M \cdot g \cos \alpha, \\ \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ m \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}' + M \left[(x \sin \alpha - R \cos \alpha)^2 + \frac{R^2}{4} \right] \dot{\varphi}' \right\} \right\} = H. \end{array} \right.$$

De la deuxième équation on déduit la valeur de H pour que $\dot{\varphi}' = \omega$; simplifications faites :

$$H = 2 \cdot M \omega x' \sin \alpha (x \sin \alpha - R \cos \alpha).$$

Cette condition étant réalisée, l'équation du mouvement est

$$\frac{3}{2}x'' - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x = - (g + \omega^2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \cos \alpha,$$

dont l'intégrale générale est immédiate. On a notamment une position d'équilibre relatif.

On calcule la réaction en appliquant le théorème du mouvement du centre de gravité au centre du disque, ce qui donne l'égalité vectorielle :

$$M \cdot \vec{\Gamma} = \vec{R} + \vec{P},$$

$\vec{P}$ est le poids du disque, $\vec{\Gamma}$ est l'accélération du centre, on peut la décomposer par application du théorème de Coriolis :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r,$$

en prenant comme système mobile le plan du disque, les notations étant évidentes. En projetant ces égalités sur les axes indiqués, on obtient les composantes :

$$R_x = M g \cdot \cos \alpha - M \omega^2 \sin \alpha \cdot (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha) + M \cdot x'',$$

$$R_y = M g \cdot \sin \alpha + M \omega^2 \cos \alpha (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha),$$

$$R_z = -2 \cdot M \omega \cdot \sin \alpha \cdot x'.$$

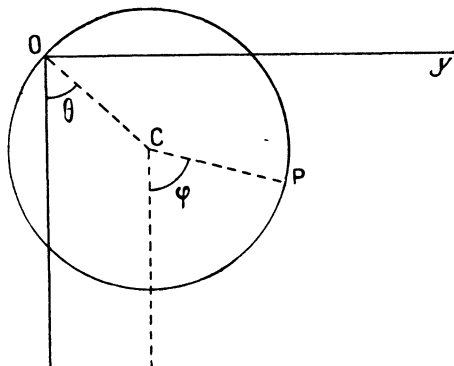
ÉPREUVE PRATIQUE. — Une circonférence matérielle, homogène et pesante, de rayon R et de masse totale M est mobile dans un plan vertical xOy autour d'un de ses points O qui est fixe; sur cette circonférence glisse sans frottement un point matériel pesant P de masse m .

1° En prenant comme paramètres les angles θ et φ des rayons OC et CP avec la verticale Ox , former les équations des petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable.

2° Intégrer ces équations et donner l'expression explicite de θ et de φ en fonction du temps, les données étant les suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 0, & \theta'_0 &= 0, & \varphi_0 &= 60', & \varphi'_0 &= 0, \\ M &= 100 \text{ gr}, & m &= 10 \text{ gr}, & R &= 98, \text{ cm}, & g &= 981, \end{aligned}$$

3° Montrer que dans ces conditions l'angle $\varphi - \theta$ est une fonction périodique du temps, calculer sa période à 0,01 sec. près.



SOLUTION - La force vive du système est :

$$2T = 2.M.R^2\dot{\theta}^2 + R^2[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)],$$

et la fonction des forces

$$U = M.g.R(\cos\theta - 1) + m.g.R[(\cos\theta - 1) + (\cos\varphi - 1)].$$

Les équations des petits mouvements autour de la position d'équilibre $\theta = 0, \varphi = 0$ sont par suite :

$$\begin{cases} R^2(2M + m)\ddot{\theta} + R^2m\ddot{\varphi} = -g.R(M + m)\theta, \\ R^2m.\ddot{\theta} + R^2m\ddot{\varphi} = -g.R.m\varphi. \end{cases}$$

Pour l'application numérique demandée ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \ddot{\varphi} = -10\varphi, \\ 21\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} = -110\theta. \end{cases}$$

La solution demandée est

$$\begin{cases} \varphi = 5'. [11\cos\sqrt{11}t + \cos\sqrt{5}t], \\ \theta = 5'. [-\cos\sqrt{11}t + \cos\sqrt{5}t]. \end{cases}$$

La suite est immédiate.

(Lille, juillet 1920.)