

A. BUHL

Sur les volumes tournants

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 374-377

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__374_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'5a]

SUR LES VOLUMES TOURNANTS ;

PAR A. BUHL.

(Suite.)

9. *Rappel du problème.* — **Le problème** le plus général posé dans l'article précédent consistait à **déterminer** des surfaces telles qu'un contour fermé, tracé sur elles, donnait, en tournant autour de deux droites fixes, D et D', des volumes tournants, V et V', de

rapport constant, c'est-à-dire tels que

$$mV = nV'.$$

Les droites D et D' avaient pour équations

$$(D) \quad \begin{cases} x = a, \\ z = y \tan \omega; \end{cases}$$

$$(D') \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = -y \tan \omega. \end{cases}$$

Dans ces conditions les surfaces cherchées sont les hélicoïdes

$$(19) \quad Y = l \arctan \frac{X}{Z} + f(X^2 + Z^2),$$

en lesquels

$$l = \frac{\alpha(\mu^2 - \nu^2) \sin \omega \cos \omega}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega}.$$

Pour le déplacement qui fait passer des x, y, z aux X, Y, Z on se reportera aux relations (15). Rappelons encore que

$$\mu = m + n, \quad \nu = m - n.$$

L'axe de l'hélicoïde (19) a pour équations $X = 0$, $Z = 0$, ou

$$(20) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha \mu \nu}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega}, \\ \nu \sin \omega y = \mu \cos \omega z. \end{cases}$$

Cet axe HY, si H est origine pour les coordonnées X, Y, Z , fait, avec Oy, un angle Ω qui se trouve être aigu dans la figure que nous imaginons.

10. *L'axe HY est axe central pour deux vecteurs respectivement portés par D et D'.* — Sur D portons un vecteur AD = m et sur D' un vecteur A'D' = $-n$. On peut convenir que A et A' seront sur l'axe OHx.

Alors, avec les notations habituelles de la théorie des vecteurs, on peut avoir

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= m \cos \omega, & Z_1 &= m \sin \omega, \\ L_1 &= 0, & M_1 &= -am \sin \omega, & N_1 &= am \cos \omega, \end{aligned}$$

pour les composantes et les moments de AD relativement aux axes $Oxyz$. De même, pour A' D', on peut avoir

$$\begin{aligned} X_2 &= 0, & Y_2 &= n \cos \omega, & Z_2 &= -n \sin \omega, \\ L_2 &= 0, & M_2 &= -an \sin \omega, & N_2 &= -an \cos \omega. \end{aligned}$$

Toujours avec les notations connues ⁽¹⁾, les équations de l'axe central des vecteurs AD et A' D' sont

$$\frac{zY - yZ}{0} = \frac{M + xZ}{Y} = \frac{N - xY}{Z},$$

et, si l'on y remplace $\bar{Y}$ par $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$, etc., on retrouve les équations (20). Donc l'axe central de AD et A' D' n'est autre que HY, axe de l'hélicoïde (19).

Si l'on projette AD et A' D' sur le plan ZHx normal à HY, la somme de ces deux projections doit évidemment être nulle et ceci donne

$$m \sin(\omega - \Omega) = n \sin(\omega + \Omega),$$

ce qui n'est qu'une autre forme de la relation déjà obtenue

$$\tan \Omega = \frac{m - n}{m + n} \tan \omega.$$

De celle-ci on peut déduire, par des calculs fort simples,

$$\tan(\omega + \Omega) = \frac{l}{HA}, \quad \tan(\omega - \Omega) = \frac{l}{HA'},$$

⁽¹⁾ P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. I, 3^e édition, p. 19. — G. Kœnigs, *Leçons de Cinématique*, p. 36.

ce qui équivaut à une égalité bien connue ⁽¹⁾, qui, avec des notations analogues à celles de A. Mannheim, s'écrit

$$\overline{HA} \operatorname{tang} (D', HY) = \overline{HA'} \operatorname{tang} (D, HY).$$

En s'appuyant sur ces résultats, on démontre facilement que, *sur l'hélicoïde central, l'hélice passant par A rencontre normalement, en A, la droite symétrique de AD par rapport au plan $\pi O x$* . On pourrait évidemment continuer ainsi et retrouver tous les théorèmes attachés à l'hélicoïde central d'un système de vecteurs, système toujours réductible à deux vecteurs tels que AD et A'D'.

A propos de ces nombreux théorèmes et de toutes les références bibliographiques qui pourraient les concerner, il me semble juste de faire un éloge spécial des *Principes et Développement de Géométrie cinématique* dus au regretté Mannheim; sa géométrie de l'espace débute précisément par un très grand nombre de propositions analogues à celles que nous venons de rappeler, propositions auxquelles, en résumé, on peut joindre la suivante : *Les contours fermés tracés sur l'hélicoïde central relatif à deux vecteurs donnent, en tournant autour de ceux-ci, des volumes de révolution de rapport constant*. Et comme on l'a vu, l'infinité d'hélicoïdes possibles correspond à la variation du rapport des volumes de révolution considérés.

Il ne doit pas non plus être sans intérêt de remarquer que la théorie de l'hélicoïde central a été ramenée ici à l'étude d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.

(¹) A. MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, p. 116. — A. SCHENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, p. 168.