

B. NIEWENGLOWSKI

Démonstration d'une formule d'Hamilton

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 361-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__361_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B12d]

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE D'HAMILTON;

PAR B. NIEWENGLOWSKI.

1. Je me propose, principalement, d'établir une formule due à Hamilton. Dans la théorie des quaternions il y a un assez grand nombre de formules à retenir; on simplifie souvent les calculs en opérant comme en géométrie analytique quand on choisit des axes particuliers. C'est ce que je vais montrer en premier lieu.

2. Rappelons d'abord que, dans la théorie des quaternions, on utilise trois unités imaginaires désignées par les lettres i, j, k , et que l'on pose

$$(1) \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{cases}$$

Si les coordonnées rectangulaires d'un point M sont x, y, z , on fait correspondre au vecteur $\overline{OM}$, l'expression

$$u = ix + jy + kz$$

et l'on dit : le vecteur u .

Soit

$$u' = ix' + jy' + kz'$$

un second vecteur. On pose

$$uu' = (ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz'),$$

et si l'on effectue en tenant compte de l'ordre des

facteurs et des équations (1), on trouve

$$uu' = -(xx' + yy' + zz') + i(yz' - zy') \\ + j(zx' - xz') + k(xy' - yx').$$

L'expression qu'on vient d'écrire se nomme le produit des deux vecteurs u, u' . On a donné à ce produit le nom de quaternion.

On pose encore

$$uu' = S(uu') + V(uu')$$

avec

$$S(uu') = -(xx' + yy' + zz'), \\ V(uu') = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx');$$

$V(uu')$ est un *vecteur*; $S(uu')$ un *scalaire*.

Si l'on calcule de la même façon $u'u$ on trouve

$$u'u = S(uu') - V(uu'),$$

et l'on dit que uu' et $u'u$ sont *conjugués*. En particulier si $u' = u$, on a

$$u^2 = -(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. Soit s un scalaire, c'est-dire un nombre réel et soit u un vecteur, si l'on pose

$$q = s + u,$$

q est un quaternion et les formules (1) permettent de définir le produit de plusieurs quaternions, produit évidemment distributif et associatif. Le conjugué de q , que l'on note $\bar{K}q$ est donné par l'égalité

$$\bar{K}q = s - u;$$

si, en particulier, q se réduit au vecteur u , on a

$$\bar{K}u = -u.$$

En général, il vient

$$\begin{aligned} q \cdot Kq &= (s + u)(s - u) = s^2 + us - su - u^2 \\ &= s^2 - u^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

en prenant

$$u = ix + jy + kz.$$

On pose

$$Tq = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

et cette quantité se nomme le *tenseur* de q ou de Kq .

On a donc

$$q \cdot Kq = (Tq)^2.$$

En posant

$$Tq = R, \quad s = R \cos \theta$$

et

$$x = aR \sin \theta, \quad y = bR \sin \theta, \quad z = cR \sin \theta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)R^2 \sin^2 \theta,$$

on aura nécessairement $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, de telle sorte que a , b , c sont les cosinus directeurs du vecteur $OM = u$, et $R \sin \theta$ la longueur OM .

Dans ces conditions

$$q = R(\cos \theta + \lambda \sin \theta)$$

et

$$Kq = R(\cos \theta - \lambda \sin \theta),$$

où

$$\lambda = ia + jb + kc,$$

et par suite

$$\lambda^2 = -1.$$

L'expression $\cos \theta + \lambda \sin \theta$ se nomme le *verseur* de q et on le désigne par Uq .

On a

$$q = Tq \cdot Uq.$$

4. Ces résultats rappelés, considérons un nouveau système d'axes rectangulaires $OXYZ$, et supposons les deux systèmes de même disposition. En adoptant les mêmes notations qu'en géométrie analytique, si l'on

pose

$$\alpha = i a + j b + k c,$$

$$\beta = i a' + j b' + k c',$$

$$\gamma = i a'' + j b'' + k c'',$$

on aura

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1, \\ \alpha\beta = -\beta\alpha = \gamma, \quad \beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha, \quad \gamma\alpha = -\alpha\gamma = \beta. \end{array} \right.$$

Les trois vecteurs unitaires α , β , γ ont les mêmes propriétés que i , j , k .

Soit u un vecteur OM. Si x , y , z sont les coordonnées de M dans le premier système et X, Y, Z les coordonnées dans le second système, on a

$$\begin{aligned} u = ix + jy + kz = & i(aX + a'Y + a''Z) \\ & + j(bX + b'Y + b''Z) \\ & + k(cX + c'Y + c''Z), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u = \alpha X + \beta Y + \gamma Z.$$

On voit que les nouveaux axes jouent exactement le même rôle que les axes primitifs. Or, ils peuvent être arbitrairement choisis; on peut donc, pour établir toutes formules relatives à des quaternions, donner aux vecteurs qui s'introduisent une position particulière par rapport aux axes, en interprétant convenablement le résultat. Par exemple, pour calculer u^2 on peut supposer u porté par Ox et prendre $u = ir$ (r étant sa longueur), d'où $u^2 = -r^2$, résultat général.

Soit, pour traiter un autre exemple, à faire le produit d'un vecteur u par un verseur $\cos\theta + \lambda \sin\theta$, l'axe λ du verseur étant perpendiculaire au vecteur u . Prenant u porté par Ox et $\lambda = k$, on a

$$ir(\cos\theta + k \sin\theta) = ir \cos\theta - jr \sin\theta$$

et

$$(\cos\theta + k \sin\theta)ir = ir \cos\theta + jr \sin\theta.$$

Donc le produit du verseur $\cos \theta + \lambda \sin \theta$ par u s'obtient en faisant tourner le vecteur de l'angle θ autour de l'axe du verseur ; pour faire le produit de u par le verseur on fera tourner de l'angle $-\theta$.

Remarque. — On voit encore que

$$(\cos \theta + \lambda \sin \theta) u = u (\cos \theta - \lambda \sin \theta);$$

si donc v est le premier verseur, en remarquant que

$$(\cos \theta + \lambda \sin \theta) (\cos \theta - \lambda \sin \theta) = 1,$$

le second verseur sera v^{-1} et l'on pourra écrire

$$vu = uv^{-1},$$

d'où l'on déduit

$$vuv = u;$$

mais cette identité n'est vraie que si l'axe du verseur v est perpendiculaire à u , ou, comme on dit encore, si le vecteur u est dans le plan du verseur v .

5. Nous établirons encore une formule utile.

Soient α , β , γ trois vecteurs quelconques. D'après ce que nous avons expliqué plus haut, sans diminuer la généralité nous pouvons supposer

$$\alpha = ir, \quad \beta = r'(i \cos \theta + j \sin \theta), \quad \gamma = r''(ia + jb + kc),$$

r , r' , r'' étant la longueur de ces vecteurs.

On a

$$\alpha\beta = rr'(-\cos \theta + k \sin \theta),$$

donc

$$\alpha\beta\gamma = -rr' \cos \theta . \gamma + rr' r'' \sin \theta k(ia + jb + kc),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= -rr' \cos \theta . \gamma + arr''(ir' \cos \theta + jr' \sin \theta) \\ &\quad - irr' r''(a \cos \theta + b \sin \theta) - crr' r'' \sin \theta, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$\alpha\beta\gamma = \alpha S(\beta\gamma) - \beta S(\gamma\alpha) + \gamma S(\alpha\beta) - cr r' r'' \sin \theta,$$

ou si l'on préfère

$$(3) \quad \begin{aligned} V(\alpha\beta\gamma) &= \alpha S(\beta\gamma) - \beta S(\gamma\alpha) + \gamma S(\alpha\beta), \\ S(\alpha\beta\gamma) &= -rr' \sin \theta cr''. \end{aligned}$$

On voit que $S(\alpha\beta\gamma) = \pm 6$ fois le volume du tétraèdre dont les trois vecteurs sont trois arêtes partant d'un même sommet. Or, si (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') sont les coordonnées des extrémités M, M', M'' des vecteurs donnés, un calcul direct facile donne

$$S(\alpha\beta\gamma) = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

on retrouve ainsi une formule de géométrie analytique. On peut remarquer qu'il résulte de la formule donnant $V(\alpha\beta\gamma)$ que

$$V(\alpha\beta\gamma) = V(\gamma\beta\alpha).$$

6. Pour arriver à la formule d'Hamilton que nous avons en vue, nous devons traiter le problème suivant :

Étant données les coordonnées x, y, z d'un point M et les cosinus directeurs d'un axe OR, on fait tourner le point M d'un angle θ autour de l'axe OR, trouver les coordonnées du point M₁ avec lequel M vient coïncider, la rotation effectuée.

Premier cas. — Les droites OM et OR sont perpendiculaires. La solution est immédiate. En supposant

$$\lambda = ia + jb + kc$$

et

$$\overline{OM} = u, \quad \overline{OM_1} = u_1,$$

on a

c'est-à-dire $u_1 = (\cos \theta + \lambda \sin \theta) u,$

$$\begin{aligned} i x_1 + j y_1 + k z_1 \\ = [\cos \theta + (ia + jb + kc) \sin \theta] (ix + jy + kz). \end{aligned}$$

Si l'on égale de part et d'autre les coefficients de i, j, k , on trouve immédiatement

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + (bz - cy) \sin \theta, \\ y_1 = y \cos \theta + (cx - az) \sin \theta, \\ z_1 = z \cos \theta + (ay - bx) \sin \theta, \end{cases}$$

le terme réel $ax + by + cz$ est nul en vertu de l'hypothèse que OM et OR sont perpendiculaires.

Second cas. — OM n'est pas perpendiculaire à OR. Les formules (4) ne conviennent plus.

Soit P la projection commune des points M, M₁ sur l'axe OR. On a

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OP} + \overline{PM}, \\ \overline{OM_1} &= \overline{OP_1} + \overline{PM_1}. \end{aligned}$$

Soient $\overline{Om}$ et $\overline{Om_1}$ deux vecteurs équipollents à $\overline{PM}$ et $\overline{PM_1}$. Si l'on fait tourner autour de OR le vecteur Om de l'angle $\frac{\theta}{2}$ et le vecteur Om_1 de l'angle $-\frac{\theta}{2}$, l'un et l'autre viendront coïncider avec un même vecteur $\overline{Om_2}$. Si l'on pose $\cos \theta + \lambda \sin \theta = v$, on posera

$$\cos \frac{\theta}{2} + \lambda \sin \frac{\theta}{2} = v^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \sin \frac{\theta}{2} = v^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on aura

$$v^{\frac{1}{2}} \overline{Om} = \overline{Om_1} v^{\frac{1}{2}} = \overline{Om_2},$$

d'où

$$(5) \quad v^{\frac{1}{2}} \overline{Om} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = \overline{Om_1},$$

car

$$\overline{Om_2} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = \overline{Om_1}.$$

En désignant $\overline{OP}$ par $h\lambda$, u et u_1 désignant les vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{OM_1}$, on a

$$\overline{Om} = u - h\lambda, \quad \overline{Om_1} = u_1 - h\lambda,$$

en portant ces expressions dans la relation (5) on obtient, après un calcul simple,

$$(6) \quad u_1 = v^{\frac{1}{2}} u v^{-\frac{1}{2}},$$

c'est la formule cherchée.

Si l'on change θ en $-\theta$, on aura pour u_1

$$u_1 = v^{-\frac{1}{2}} u v^{\frac{1}{2}}.$$

C'est sous cette forme qu'Hamilton écrit sa formule, mais comme il représente par ba le produit de a par b , c'est la formule (5) qui, avec nos notations, traduit sa pensée.

Pour calculer x_1, y_1, z_1 , effectuons les calculs indiqués:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \lambda \sin \frac{\theta}{2} \right) u &= u \cos \frac{\theta}{2} + \lambda u \sin \frac{\theta}{2}, \\ \left(u \cos \frac{\theta}{2} + \lambda u \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \lambda \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= u \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\lambda u - u \lambda) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \lambda u \lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

mais

$$\lambda u = S(\lambda u) + V(\lambda u),$$

donc

$$u \lambda = S(\lambda u) - V(\lambda u);$$

$$\lambda u - u \lambda = 2 V(\lambda u).$$

Pour calculer $\lambda u \lambda$ on peut prendre les deux vecteurs λ, u dans le plan des xy , mais on peut se servir de

l'identité (3), en remarquant que $S(\lambda u \lambda) = 0$, et par suite

$$\lambda u \lambda = V(\lambda u \lambda) = 2\lambda S(u \lambda) + u,$$

car $S(\lambda^2) = -1$. On a donc

$$\rho^{\frac{1}{2}} u \rho^{-\frac{1}{2}} = u \cos^2 \frac{\theta}{2} + V(\lambda u) \sin \theta - [2\lambda S(u \lambda) + u] \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned} V(\lambda u) &= i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx), \\ S(\lambda u) &= -(ax + by + cz), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} ix_1 + jy_1 + kz_1 &= (ix + jy + kz) \cos \theta \\ &\quad + [i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)] \sin \theta \\ &\quad + 2(ia + jb + kc)(ax + by + cz) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

En identifiant on obtient

$$(\tau) \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + (bz - cy) \sin \theta + 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz), \\ y_1 = y \cos \theta + (cx - az) \sin \theta + 2b \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz), \\ z_1 = z \cos \theta + (ay - bx) \sin \theta + 2c \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz). \end{cases}$$

Remarques. — Si OM et OR sont perpendiculaires, on a $ax + by + cz = 0$ et l'on retrouve les formules (4).

Si $\theta = \pi$, on a des formules évidentes *a priori* et qui expriment que P est alors le milieu de MM_1 .

7. Il est juste de rappeler encore que les formules (4) et, par suite, les formules (7) peuvent s'obtenir très aisément sans le secours des quaternions.

En conservant les mêmes notations, transportons l'origine des coordonnées au point P, par une translation égale à $\overline{OP}$. Soient X, Y, Z et X₁, Y₁, Z₁ les coordonnées de M et M₁ par rapport aux nouveaux axes. Prenons un troisième système d'axes définis ainsi : Pξ a la même direction et le même sens que PM; Pζ est confondu avec l'axe OR; enfin Pη est perpendiculaire à Pξ et Pζ et orienté de façon que le trièdre Pξηζ soit de même espèce que PXYZ et Oxyz. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées nouvelles de M₁, on a

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad \zeta = 0$$

avec $r = PM$. Les cosinus directeurs de Pξ par rapport aux premiers axes sont $\frac{X}{r}, \frac{Y}{r}, \frac{Z}{r}$; ceux de Pζ sont, par hypothèse, a, b, c et ceux de Pη ont pour valeurs

$$\frac{bZ - cY}{r}, \quad \frac{cX - aZ}{r}, \quad \frac{aY + bX}{r}.$$

On a donc

$$X_1 = r \cos \theta \frac{X}{r} + r \sin \theta \frac{bZ - cY}{r},$$

c'est-à-dire

$$(3') \quad X_1 = X \cos \theta + (bZ - cY) \sin \theta,$$

et pareillement pour Y₁, Z₁. On obtient ainsi les formules (4) et l'on passe aisément de ces formules aux formules (7) en remplaçant X, Y, Z par $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ et X₁, Y₁, Z₁ par $x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0$, où x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées de P par rapport au premier système, c'est-à-dire

$$x_0 = a(ax + by + cz),$$

$$y_0 = b(ax + by + cz),$$

$$z_0 = c(ax + by + cz).$$