

RENÉ THIRY

Étude d'un problème sur le pendule à longueur variable (Agrégation, 1922)

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2 (1923), p. 335-349

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__335_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R7f]

ÉTUDE D'UN PROBLÈME SUR LE PENDULE
A LONGUEUR VARIABLE

(Agrégation, 1922);

PAR RENÉ THIRY

(Strasbourg).

Parmi les épreuves proposées pour la composition de Mécanique au concours d'Agrégation de 1922 se trouvait la question suivante :

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy (Oy vertical vers le haut). Un pendule simple est formé par un fil inextensible et sans masse dont une extrémité est fixée en un point A de Oy ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel M de poids mg , dont la position d'équilibre est le point O . Ce fil passe à travers un anneau horizontal

très petit dont le centre peut occuper une position quelconque entre O et A. Si l'anneau est fixé de manière que son centre occupe un point B de Oy, la longueur véritable du pendule est $OB = b$. On fait alors osciller ce pendule dans le plan xOy , on désigne par α son angle d'élongation maximum et l'on suppose α assez petit pour que, dans toutes les expressions dépendant de α , on ne conserve que la partie principale. Calculer la période du mouvement qu'on appellera période du pendule et l'énergie totale qu'il a fallu dépenser pour le mettre en mouvement à partir de sa position d'équilibre (énergie du pendule).

Comment se modifie la période et l'énergie lorsqu'on modifie la position de l'anneau en le déplaçant à la main sur Oy? On étudiera d'abord le cas où l'on élève et abaisse l'anneau d'une longueur très petite ε à partir de B assez rapidement pour que, pendant ce déplacement, l'angle du fil avec Oy puisse être regardé comme constant; on désignera cet angle par θ . On suppose ensuite, le déplacement ε restant très petit, que le mouvement de l'anneau est uniforme et que la durée du déplacement ε est égale à la période du pendule. On étudiera enfin le cas où la durée du déplacement comprend un grand nombre de périodes (la fraction de période, si elle existe, étant par suite négligeable), sa vitesse restant assez faible pour que le déplacement pendant une période soit très petit, et les variations de cette vitesse étant également assez faibles pour qu'elle puisse être regardée comme constante pendant la durée de chaque période. La position finale de l'anneau étant C ($OC = c$) on examinera en particulier ce qui se passe si c augmente indéfiniment

(ce qui exige que OA soit considérable) ou si c tend vers zéro. Peut-on trouver entre la période et l'énergie du pendule une relation indépendante de c ? (1).

Je me propose d'étudier plus spécialement la première partie de cette question, celle qui est relative à un déplacement du point B « assez rapide pour que, pendant ce déplacement, l'angle du fil avec O γ puisse être regardé comme constant ».

1. Si à un instant donné le fil BM fait un angle θ_0 avec la verticale et possède une vitesse angulaire θ'_0 , et si dans la suite du mouvement le point B reste fixe (à une distance b_0 de O), le pendule oscille comme un pendule simple ordinaire et le calcul élémentaire classique donne, pour la période, pour l'élongation maximum, pour l'énergie et pour la tension du fil, les valeurs suivantes :

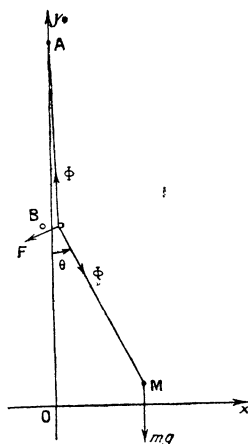
$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{b_0}{g}}, \\ \alpha_0^2 = \theta_0^2 + \frac{b_0}{g} \theta_0'^2, \\ E_0 = \frac{mg b_0}{2} \alpha_0^2 = \frac{mg b_0}{2} \left[\theta_0^2 + \frac{b_0}{g} \theta_0'^2 \right], \\ \mathcal{C}_0 = mg, \end{array} \right.$$

en se bornant à l'approximation, indiquée dans l'énoncé, des petites oscillations.

(1) On comprend généralement sous le nom de *pendule simple à longueur variable* le cas où, le point B restant fixe, la longueur du pendule varierait par suite du déplacement du point A. Ce problème ne coïncide avec celui qui nous occupe ici que dans le cas où la variation de la longueur du pendule est fonction linéaire du temps ou, ce qui revient au même, lorsque le mouvement de l'anneau est uniforme.

Ceci posé, un premier raisonnement, presque imposé par la rédaction du problème, se présente à l'esprit.

Supposons que nous tenions l'anneau à la main à un moment où les conditions θ_0 , θ'_0 , b_0 sont réalisées. Le fil agit alors sur une des sections de l'anneau par le plan d'oscillation à la façon des deux brins de la corde dans la poulie fixe et l'anneau est soumis aux deux forces Φ et Φ' égales toute deux à la tension $\mathfrak{C}_0$ du fil à cet instant (voir *fig. 1*). Pour que l'anneau reste



immobile, il faut donc que la main exerce sur lui une force F équilibrant les deux forces précédentes. Si brusquement nous déplaçons l'anneau d'une quantité très petite ε et si nous admettons que le déplacement soit tel que la tension varie peu et que l'angle θ conserve à peu près la même valeur, la force F fournira un certain travail ⁽¹⁾ qui modifiera d'autant l'énergie du pendule.

(¹) Ce travail sera effectivement fourni au pendule si ε est négatif, il sera au contraire récupéré par la main de l'opérateur si ε est positif.

Ce travail se calcule immédiatement, il a pour valeur algébrique

$$- \varepsilon \cdot \mathfrak{E}_0 (1 - \cos \theta).$$

En s'en tenant toujours à la même approximation, on aura pour l'énergie du pendule lorsque le point B se sera arrêté à la cote $b_0 + \varepsilon$ la formule

$$(2) \quad E_1 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \cdot \varepsilon.$$

A partir de là, on calcule immédiatement le nouvel angle d'écart maximum

$$(3) \quad \alpha_1^2 = \alpha_0^2 - \left[\frac{2\theta_0^2}{b_0} + \frac{\theta_0'^2}{g} \right] \varepsilon$$

(au même degré d'approximation) et enfin la nouvelle période

$$(4) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{b_0 + \varepsilon}{g}} = T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sim T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2b_0} \right).$$

On ne saurait dire, à mon avis, que ce raisonnement soit bien satisfaisant. Il faut en effet, d'une part, que le déplacement soit *assez rapide* pour que l'angle reste sensiblement constant; mais, d'autre part, un déplacement *trop rapide* (vers le haut par exemple) entraînera nécessairement pour B des périodes de grande accélération, comme nous le verrons tout à l'heure, et il est à craindre que le fil ne reste pas tendu, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse faite que la tension varie peu pendant le déplacement. Dans quelles limites ces conditions, en apparence opposées, sont-elles compatibles, c'est ce que je me propose d'étudier ici. On pourrait peut-être exposer de façon plus synthétique les réflexions qui vont suivre, mais il m'a paru plus intéressant, dans l'étude d'une question d'examen, de laisser subsister les différentes phases de l'analyse du

problème telles qu'elles se sont présentées naturellement à moi.

2. Commençons d'abord par établir les équations générales du mouvement de M en supposant que les variations du point B aient lieu suivant une loi donnée quelconque

$$b = f(t).$$

Les coordonnées du point B étant $x = b \sin \theta$, $y = b(1 - \cos \theta)$, on en calculera facilement les dérivées secondes par rapport à t et les équations fondamentales de la dynamique du point s'écriront :

$$(5) \quad \begin{cases} m[b \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - b \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ \quad + 2b' \cos \theta \cdot \dot{\theta}' + b'' \sin \theta] = -\mathfrak{T} \sin \theta, \\ m[b \sin \theta \cdot \ddot{\theta}'' + b \cos \theta \cdot \dot{\theta}'^2 \\ \quad + 2b' \sin \theta \cdot \dot{\theta}' + b''(1 - \cos \theta)] = \mathfrak{T} \cos \theta - mg. \end{cases}$$

On les remplacera par deux combinaisons évidentes éliminant, l'une la tension, l'autre la dérivée $\dot{\theta}''$:

$$(6) \quad \begin{cases} b\ddot{\theta}'' + 2b'\dot{\theta}' + (b'' + g) \sin \theta = 0, \\ \mathfrak{T} = m[b\dot{\theta}'^2 + b''(\cos \theta - 1) + g \cos \theta]. \end{cases}$$

Si l'on se borne à étudier des parties du mouvement pendant lesquelles θ reste très petit, on peut remplacer ces équations par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} b\ddot{\theta}'' + 2b'\dot{\theta}' + (b'' + g)\theta = 0, \\ \mathfrak{T} = m\left[g + b\dot{\theta}'^2 - \frac{1}{2}(b'' + g)\theta^2\right]. \end{cases}$$

Nous allons maintenant supposer d'abord que le déplacement ε soit réalisé avec une vitesse constante. Nous placerons l'origine des temps au début du mouvement de l'anneau et nous appellerons τ_1 la durée du

déplacement. A l'instant initial θ , θ' , b auront les valeurs θ_1 , θ'_1 , b_1 et nous nous proposons de calculer les valeurs correspondantes θ_2 , θ'_2 , b_2 à la fin de la perturbation.

Pendant la durée du déplacement, on aura

$$b = b_1 + kt$$

(la vitesse k ayant une valeur finie quelconque), et puisque nous supposons τ_1 très petit, nous pourrions chercher θ sous forme d'un développement en série

$$\theta = \theta_1 + \theta'_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Le calcul du coefficient a_2 se fait immédiatement à l'aide de l'équation différentielle et l'on trouve, au bout du temps τ_1 ,

$$(8) \quad \begin{cases} b_2 = b_1 + k\tau_1, \\ \theta_2 = \theta_1 + \theta'_1 \tau_1, \\ \theta'_2 = \theta'_1 - \frac{g\theta_1 + 2k\theta'_1}{b_1} \tau_1, \end{cases}$$

en négligeant les puissances de τ_1 supérieures à la première.

On en tire de suite, toujours avec la même approximation :

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_2^2 = \alpha_1^2 - 3 \frac{\theta_1'^2}{g} k \tau_1, \\ E_2 = E_1 - \frac{mg}{2} \left[\frac{2b_1}{g} \theta_1'^2 - \theta_1^2 \right] k \tau_1. \end{cases}$$

Les formules que nous trouvons ainsi ne sont nullement d'accord avec les formules (2) et (3) trouvées plus haut. Il n'y a pas lieu de s'en étonner; en effet, il est impossible que l'anneau passe brusquement du repos à un mouvement uniforme. Il faut nécessairement qu'il y ait un mouvement varié aussi bien au départ qu'à l'arrêt. Pour produire ce mouvement varié il

faudra faire agir sur l'anneau des forces d'autant plus grandes que l'on voudra établir plus rapidement le régime uniforme et, en particulier, si l'on voulait réaliser le passage brusque du repos initial au mouvement uniforme puis au repos final, il faudrait introduire une percussion au départ et une autre à l'arrêt.

θ_1, θ'_1, b_1 sont les valeurs après la première percussion; θ_2, θ'_2, b_2 les valeurs avant la deuxième, ce ne sont nullement les valeurs à prendre au début et à la fin de la perturbation totale.

Remarquons encore que, pendant la période de mouvement uniforme, la tension reste très voisine de la valeur mg .

3. Proposons-nous maintenant d'étudier l'effet de la période de mouvement varié (nous le supposons uniformément varié) qui doit nécessairement précéder la phase uniforme.

En reportant l'origine des temps au début de cette période (dont nous supposons la durée égale à τ_0) et en appelant θ_0, θ'_0, b_0 les valeurs des paramètres à cette époque, on aura

$$b = b_0 + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

γ devant être tel qu'au bout du temps τ_0 la vitesse h de régime uniforme soit réalisée, ce qui donne $\gamma \tau_0 = h$.

La même méthode de recherche de θ sous forme d'un développement en série donne par un calcul facile

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0 + \frac{1}{2} \gamma \tau_0^2, \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta'_0 \tau_0 - \frac{g + \gamma}{2 b_0} \theta_0 \tau_0^2, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{g + \gamma}{b_0} \theta_0 \tau_0 - \frac{g + 3\gamma}{2 b_0} \theta'_0 \tau_0^2. \end{array} \right.$$

Si l'on voulait se rapprocher du cas théorique de la percussion instantanée, il faudrait dans ces formules faire tendre τ_0 vers zéro, ce qui donnerait (en tenant compte naturellement des variations de γ)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0, \\ \theta_1 = \theta_0, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{\theta_0}{b_0} \lambda. \end{array} \right.$$

Une étude complètement analogue donnerait pour caractériser l'effet de la percussion d'arrêt (en appelant θ_2, θ'_2, b_2 les valeurs des paramètres avant la percussion et θ_3, θ'_3, b_3 leurs valeurs immédiatement après) les formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_3 = b_2, \\ \theta_3 = \theta_2, \\ \theta'_3 = \theta'_2 + \frac{\theta_2}{b_2} \lambda. \end{array} \right.$$

En sautant les intermédiaires, on aurait pour l'ensemble du déplacement

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_3 = b_0 + \varepsilon, \\ \theta_3 = \theta_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b_0} \right) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \theta'_0, \\ \theta'_3 = \theta'_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b_0} \right) + \frac{g\varepsilon}{kb_0} \theta_0. \end{array} \right.$$

et l'on en déduirait, par un calcul que je pense inutile de reproduire,

$$(14) \quad E_3 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \varepsilon;$$

ce qui, cette fois, concorde entièrement avec la formule (2) obtenue au début de cette étude.

Mais ce résultat n'est pas encore satisfaisant; en effet, pendant la période variée (celle du début par

exemple), on aura pour la tension

$$\mathfrak{T} = m \left[g + b \theta'^2 - \frac{1}{2} (\gamma + g) \theta^2 \right].$$

Or si τ_0 tend vers zéro, θ augmente indéfiniment (puisque $\gamma \tau_0 = k$); la tension subira donc des variations considérables et, en particulier, si γ est positif, elle s'annulera certainement (1).

Autrement dit, le fil aura une tendance à se rompre à une des extrémités du mouvement et à se détendre à l'autre. Ceci est incompatible avec les conditions du problème qui suppose la liaison du fil jouant en permanence.

4. Il est par conséquent impossible d'assimiler à des percussions les périodes de mise en marche et d'arrêt, ces périodes ne peuvent être instantanées, elles doivent occuper une partie notable de la durée totale du déplacement.

Entre les quantités γ , k , τ_0 et τ_1 on a les relations

$$\gamma \tau_0^2 + k \tau_1 = \varepsilon,$$

$$\gamma \tau_0 = k,$$

d'où l'on tire

$$\tau_0 (\tau_0 + \tau_1) = \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

On prendra alors γ arbitrairement, tel qu'on soit assuré que la tension ne s'annule pas et l'on choisira pour τ_0 et τ_1 des quantités positives satisfaisant à la dernière des relations précédentes.

On peut alors reprendre le calcul de θ_3 , θ'_3 , b_3 en

(1) Si γ était négatif pour la percussion de début, le déplacement aurait lieu vers le bas et ce serait à la percussion d'arrêt que la tension s'annulerait.

fonction de θ_0, θ'_0, b_0 en se servant alors des formules (10) au lieu des formules (11) et en remplaçant de même le groupe (12) par un groupe analogue. Le calcul est possible mais est un peu long ; il conduit à la formule (2) et cette fois sans aucune impossibilité mécanique. On peut le simplifier en supprimant la phase de mouvement uniforme (ce qui revient à poser $\tau_1 = 0$) et en réalisant le déplacement à l'aide de deux mouvements, l'un accéléré, l'autre retardé, de même durée, se succédant immédiatement. Je laisse au lecteur le soin de faire les calculs sous cette forme.

5. On peut du reste réaliser en une seule formule cette succession de deux mouvements, l'un accéléré, l'autre retardé, en prenant pour la fonction $b = f(t)$ un polynôme du troisième degré dont la dérivée soit nulle au début et à la fin de la perturbation. Si l'on appelle τ la durée totale du déplacement, il suffit de poser

$$(15) \quad b = b_0 + \frac{3}{2} h \tau t^2 - h t^3,$$

h étant une constante quelconque reliée à ε par la condition

$$(16) \quad \frac{1}{2} h \tau^3 = \varepsilon.$$

Dans un tel mouvement, la valeur absolue de l'accélération aura pour maximum la quantité

$$\gamma = 3 |h| \tau.$$

On prendra arbitrairement la valeur de h , l'équation (16) déterminera τ et la valeur de γ (égale à $3\sqrt[3]{2\varepsilon h^2}$) nous mettra certainement à l'abri de toute variation trop grande de la tension du fil.

Ici, si nous effectuons les calculs comme précédem-

ment en nous bornant aux termes en ε , il faut pousser nos développements jusqu'aux termes en τ^3 .

Comme précédemment, nous chercherons θ sous forme d'un développement en série

$$\theta = \theta_0 + \theta'_0 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

L'équation différentielle donnera facilement les valeurs des coefficients

$$(17) \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{g\theta_0}{2b_0} - \frac{3h\tau}{2b_0} \theta_0, \\ a_3 = \frac{6h\theta_0 - g\theta'_0}{6b_0} - \frac{3h\tau}{2b_0} \theta'_0, \\ a_4 = \frac{g^2\theta_0}{24b_0^2} + \frac{h\theta'_0}{b_0} + \frac{7g h \tau}{8b_0^2} \theta_0 + \frac{9h^2\tau^2}{4b_0^3} \theta_0, \end{cases}$$

et en donnant à t la valeur τ et en négligeant les puissances de τ supérieures à la troisième on aura

$$(18) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 + \theta'_0 \tau - \frac{g\theta_0}{2b_0} \tau^2 - \frac{3h\theta_0 + g\theta'_0}{6b_0} \tau^3, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{g\theta_0}{b_0} \tau - \frac{g\theta'_0}{2b_0} \tau^2 + \left(\frac{g^2\theta_0}{6b_0^2} - \frac{h\theta'_0}{2b_0} \right) \tau^3, \end{cases}$$

d'où enfin, au même degré d'approximation ⁽¹⁾,

$$(19) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_0^2 - \left[\frac{g\theta_0^2}{b_0} + \frac{\theta_0'^2}{g} \right] \varepsilon, \\ E_1 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \varepsilon. \end{cases}$$

et ces formules sont entièrement d'accord avec celles que nous avons pressenties au début ⁽²⁾.

(1) Les termes en τ et τ^2 qui correspondent à des puissances fractionnaires de ε disparaissent.

(2) Il est à remarquer que pendant ce déplacement la vitesse moyenne $V = \frac{\varepsilon}{\tau} = \sqrt[3]{\frac{h\varepsilon^2}{2}}$ reste très faible; il semble donc que l'auteur de l'énoncé a voulu dire que le déplacement devait avoir une durée courte plutôt qu'une grande vitesse, comme le mot *rapide* pouvait le laisser supposer.

6. Je ne dirai que quelques mots de la suite du problème, pour laquelle de semblables difficultés ne se présentent pas. Les déplacements y ont lieu en effet avec des vitesses et des accélérations très faibles et l'effet des périodes de mise en marche et d'arrêt devient tout à fait négligeable.

Si nous supposons le petit déplacement ε réalisé pendant une période avec une vitesse constante très petite k , en appelant ω la quantité $\sqrt{\frac{g}{b_0}}$ et en posant

$$\frac{k}{b_0} = h,$$

l'équation différentielle deviendra

$$(20) \quad (1 + ht)\theta'' + 2h\theta' + \omega^2\theta = 0.$$

Nous en chercherons une solution sous forme d'un développement en série de fonctions suivant les puissances de h ,

$$\theta = \Phi_0(t) + h\Phi_1(t) + h^2\Phi_2(t) + \dots,$$

en supposant que pour $t = 0$ (début du mouvement), on ait

$$\Phi_0(0) = \theta_0, \quad \Phi'_0(0) = \theta'_0, \quad \Phi_1(0) = \Phi'_1(0) = \dots = 0.$$

Un calcul facile donnera pour Φ_0 et Φ_1 les expressions

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\theta'_0}{\omega} \sin \omega t, \\ \Phi_1 = \left[\frac{3}{4} \frac{\theta_0}{\omega} - \frac{3}{4} \theta_0 t - \frac{1}{4} \theta'_0 t^2 \right] \cos \omega t \\ \quad + \left[-\frac{3}{4} \frac{\theta'_0}{\omega} t + \frac{1}{4} \omega \theta_0 t^2 \right] \sin \omega t, \end{array} \right.$$

d'où par suite à la fin de la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ les nou-

velles valeurs de θ et de θ' (en négligeant toujours les puissances de ε supérieures à la première),

$$(22) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\varepsilon}{4b_0} (3\theta_0 + T_0\theta'_0), \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{\varepsilon}{4b_0} (5\theta'_0 - T_0\omega^2\theta_0), \end{cases}$$

ce qui donne enfin, pour le nouvel angle d'écart maximum et pour l'énergie,

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_0^2 \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2b_0}\right), \\ E_1 = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2b_0}\right). \end{cases}$$

D'autre part, la nouvelle période du pendule sera

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sim T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2b_0}\right).$$

On en déduit immédiatement la relation

$$(24) \quad E_1 \cdot T_1 = E_0 \cdot T_0.$$

Enfin, si l'on réalise un déplacement fini tel qu'on puisse le décomposer en déplacements très petits remplissant les conditions précédentes, on aura pendant toute la durée du mouvement

$$(25) \quad E \cdot T = \text{const.}$$

En particulier, si l'anneau est déplacé très loin vers le haut, la période augmente indéfiniment et par suite l'énergie tend vers zéro. Si, au contraire, l'anneau se rapproche du point O, la période diminue et l'énergie grandit, mais ceci entraîne également une augmentation de l'angle α et l'on ne peut trop se rapprocher

de O sans que les approximations faites sur les petites oscillations cessent d'être valables ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ On peut encore retrouver la formule (23) en utilisant les résultats de la première partie du problème. Le raisonnement suivant m'a été signalé par un de mes élèves, M. Hourt.

Décomposons l'intervalle ε en un grand nombre de parties suffisamment petites pour que chacune d'elles soit parcourue par l'anneau en un temps très court. Soit $d\varepsilon$ une de ces parties correspondant à l'époque t du mouvement. Dans le déplacement $d\varepsilon$ l'énergie du pendule s'accroît algébriquement de la quantité

$$- \mathfrak{C} \frac{\theta^2}{2} d\varepsilon \sim - mg \frac{\theta^2}{2} d\varepsilon,$$

d'après la formule (2).

Pendant la période totale T l'accroissement d'énergie sera donc

$$E_1 - E_0 = - \int_0^T \frac{mg}{2} \theta^2 k dt \quad \text{puisque} \quad d\varepsilon = k dt.$$

Or, $\frac{mg\theta^2}{2}$ est égal à l'énergie *potentielle* E_p à l'instant t . On a donc

$$E_1 - E_0 = - \int_0^T \frac{E_p}{b} k dt = - k T. \left(\frac{E_p}{b} \right),$$

$\left(\frac{E_p}{b} \right)$ désignant la valeur moyenne de la fonction $\frac{E_p}{b}$ pendant une période. Cette expression pourrait se développer en série suivant les puissances de k ,

$$\left(\frac{E_p}{b} \right) = \left(\frac{E_p}{b} \right)_0 + A k + \dots,$$

et le premier terme serait la valeur moyenne de $\frac{E_p}{b}$ dans le cas où k serait nul, c'est-à-dire où le pendule conserverait la longueur b_0 .

Or, dans ce cas, le calcul de la valeur moyenne se fait immédiatement et donne la valeur $\frac{E_0}{2b_0}$ (E_0 désignant comme dans le corps de l'article l'énergie totale du pendule de longueur b_0).

D'où la formule

$$E_1 - E_0 = - \frac{\varepsilon E_0}{2 b_0},$$

qui n'est autre que la seconde des formules (23).