

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 315-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__315_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. *On considère la courbe gauche définie par les formules*

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} z \\ y &= \operatorname{sh} z \end{aligned} \quad \left(\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right).$$

1° *Former l'équation du plan osculateur au point de cote z et celle de la trace de ce plan sur le plan des xy .*

2° Lorsque z varie, cette trace enveloppe une courbe plane; calculer les coordonnées du point de contact de la trace et de son enveloppe en fonction de z ; vérifier que ce point est sur la tangente à la courbe gauche au point x, y, z .

3° Construire la courbe enveloppe précédente.

II. Ellipsoïde d'inertie.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION DE I. — La première partie se traite immédiatement et l'on trouve la trace

$$-X \operatorname{sh} z + Y \operatorname{ch} z + z = 0,$$

d'où, pour le point de contact avec l'enveloppe,

$$X = \operatorname{ch} z - z \operatorname{sh} z, \quad Y = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z;$$

on retrouve le même point en cherchant la trace sur xy de la tangente à la courbe gauche au point x, y, z .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

1° Déterminer la solution telle que, pour $x = 0$, on ait $y = 0$, $y' = 1$. Construire la courbe intégrale correspondante (γ) .

2° Soient A_n le point de l'arc des x d'abscisse $n\pi$ et S_n l'aire comprise entre la corde $A_n A_{n+1}$ et l'arc $A_n A_{n+1}$ de (γ) . Calculer S_n ; calculer, avec l'approximation des tables à cinq décimales, les limites pour n infini des sommes

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n, \quad |s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|.$$

3° Sur l'arc $A_n A_{n+1}$ il y a un point d'inflexion B_n . Soient M un point de la courbe voisin de B_n et R le rayon de courbure de (γ) en M . Montrer que le produit $|R \times MB_n|$ tend vers une limite λ_n quand M tend vers B_n . Étudier comment varie λ_n avec l'entier n et calculer sa valeur minima.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'intégrale cherchée de l'équation différentielle proposée est $y = e^{-x} \sin x$.

On trouve

$$s_n = (-e^{-\pi})^n \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

et l'on a à calculer les limites des sommes de deux progressions géométriques de raison $-e^{-\pi}$ et $e^{-\pi}$.

Pour la troisième partie le point B_n est d'abscisse $n\pi + \frac{\pi}{2}$, le produit indiqué, ou mieux son carré, se calcule sans difficulté. C'est une fonction de x qui prend la forme $\frac{0}{0}$ quand M tend vers B_n et l'on peut trouver sa limite par application répétée de la règle de l'Hôpital. Le reste est immédiat.

(Bordeaux, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe (C) qui représente les variations de la fonction

$$(1) \quad f(x) = e^{-x}(x+1).$$

Évaluer l'aire limitée, au-dessus de l'axe des x , par la courbe (C).

2° Vérifier que, x étant positif, la différence

$$f(x) - f(-x)$$

est toujours positive et trouver la partie principale de cette différence quand x , pris pour infiniment petit principal, tend vers zéro.

3° Soit M_1 un point de la courbe (C) d'abscisse positive donnée x_1 ; la parallèle à l'axe des x menée par M_1 rencontre (C) en un autre point dont on nommera $-x_2$ l'abscisse; on a donc $f(-x_2) = f(x_1)$.

Soient de même $-x_3$ tel que $f(-x_3) = f(x_2)$; $-x_4$ tel que $f(-x_4) = f(x_3)$, ...

Quelle est la limite de la suite des nombres ainsi définis : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

4° Un point matériel P, de masse unité, est mobile sans frottement sur un axe Ox . Il est attiré par l'origine proportionnellement à la distance, la force correspondante étant $F = -\frac{1}{2}x$ (x abscisse du mobile); il est de plus

soumis à une force dirigée en sens inverse de la vitesse

$\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$ et égale à $\frac{1}{2} v^2$.

Montrer que, lorsque la vitesse est négative, elle est liée à l'abscisse par la relation

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e^x[f(x) - C].$$

C étant une constante et $f(x)$ étant la fonction précédente (1). Qu'y a-t-il à changer à l'équation (2) si la vitesse du mobile est positive.

Indiquer sommairement, sans chercher à intégrer (2) les circonstances du mouvement. $\left[\begin{array}{l} \text{Conditions initiales :} \\ \text{pour } t = 0, x = x_1 \text{ donné, } \frac{dx}{dt} = 0. \end{array} \right]$

INDICATIONS. — 1° L'aire vaut e . 2° La partie principale est $\frac{2}{3}x^3$. 3° On vérifiera immédiatement que la suite envisagée est décroissante; la limite l est nulle car elle vérifie

$$f(l) = f(-l).$$

4° Ne présente pas de difficultés; on retrouvera, dans l'étude du mouvement de P, la suite précédente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit la courbe représentée paramétriquement par

$$x = R(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = R(1 - \cos \varphi)$$

(axes rectangulaires). On la fait tourner autour de Ox .

1° Aire engendrée par un arc OM de cette courbe (M étant le point de paramètre φ).

2° Coordonnées du point M_0 pour lequel l'aire précédente est égale à $8\pi R^2$.

3° Volume engendré par l'aire plane comprise entre l'arc OM_0 , Ox et l'ordonnée de M_0 en tournant autour de Ox .

INDICATIONS. — L'application des formules classiques conduit pour déterminer le paramètre φ_0 du point M_0 à l'équation

$$2 \cos^3 \frac{\varphi_0}{2} - 6 \cos \frac{\varphi_0}{2} + 1 = 0.$$

(Marseille, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos x.$$

II. *Construire, en employant par exemple les coordonnées polaires, la courbe $y^4 - x^4 + 2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0$. Chercher si la courbe admet des asymptotes.*

La courbe coupe Ox en un point A d'abscisse $\sqrt{2}$. Aire comprise entre OA et la courbe.

III. 1° *Construire les projections sur le plan xOy des courbes tracées sur la surface S qui a pour équation*

$$z = x^2 y + y^3$$

et qui coupent à angle droit les sections de S par les plans parallèles à xOy.

2° *On considère le solide limité par S et la surface*

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

volume de la portion de ce solide pour laquelle on a

$$y > 0, \quad z > 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un point M est soumis à son poids mg et à une force $mg \frac{OM}{a}$ dirigée de M vers un point fixe O.*

1° *Surfaces de niveau et lignes de forces du champ ainsi défini.*

2° *Le point M est mobile sans frottement sur une droite verticale D, située à la distance $a = OA$ du point O. Peut-il être en équilibre stable. Étudier le mouvement de M abandonné sans vitesse en A.*

3° Le point M est mobile avec frottement sur D, le coefficient de frottement est $\frac{1}{4}$. Mêmes questions que dans 2°.

II. x étant évalué en radians, dire combien l'équation $4 \sin x - 2x - 1 = 0$ a de racines. Calculer la plus petite racine positive à $\frac{1}{100}$ près. (Lyon, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation

$$(3x^2 + y^2)y \, dx + (y^2 - x^2)x \, dy = 0 :$$

a. considérée comme équation homogène; b. en lui donnant un facteur intégrant fonction de y seul.

2° On considère les cercles C d'équation

$$x^2 + y^2 + (1 - \lambda^2)x - 2\lambda y + (1 + \lambda)^2 = 0,$$

λ étant un paramètre variable. Soient D le lieu de leurs centres, Γ leur enveloppe, C_2 le cercle particulier obtenu pour $\lambda = -2$; dessiner les courbes D, Γ , C_2 sur la même figure; préciser l'intersection et la disposition mutuelle de Γ avec D et C_2 .

3° Chaque cercle C coupe Γ en deux points P et Q: montrer que PQ passe par un point fixe A et que le produit $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ est indépendant de λ .

4° Le point A est le point d'abscisse positive sur Γ où la tangente est parallèle à Oy: calculer à $\frac{1}{100}$ près l'aire comprise entre l'arc OA de Γ et sa corde.

II. Une plaque carrée homogène de côté $a = 1^m$ et de masse $M = 10^{18}$ est mobile autour d'un de ses côtés qui est fixe. A l'instant où sa vitesse angulaire est $\omega = 2\pi$ radians par seconde; la plaque s'arrête brusquement en heurtant un obstacle fixe par le côté opposé à l'axe de rotation. La durée du choc étant $\tau = 0,01$ seconde, quelle est la valeur moyenne de la force de percussion correspondante, supposée normale au plan de la plaque?

(Toulouse, juillet 1923.)

