

ANDRÉ BLOCH

Quelques démonstrations de la relation des compléments $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2 (1923), p. 283-292

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__283_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[E 1 f]

**QUELQUES DEMONSTRATIONS DE LA RELATION
DES COMPLEMENTS**

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha};$$

PAR ANDRE BLOCH.

La relation des compléments, découverte par Euler, joue un rôle essentiel dans la théorie de la fonction

gamma ⁽¹⁾. Elle est un peu plus cachée que les autres propriétés élémentaires de la fonction gamma, parce qu'elle équivaut au développement en produit de $\sin x$, qui est lui-même un peu plus caché que les autres propriétés de la fonction sinus x . Notre objet est d'en donner quelques démonstrations probablement nouvelles ⁽²⁾.

Rappelons que

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{a(a+1) \dots (a+n)} = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u} du.$$

Nous n'utiliserons d'ailleurs que la définition comme intégrale définie. Rappelons aussi que

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Dans la première des deux intégrales qui viennent d'être écrites, la partie réelle de a est supposée positive; dans la seconde, elle est supposée comprise entre 0 et 1. Ces suppositions et les suppositions analogues, seront quelquefois sous-entendues dans ce qui suit. D'ailleurs, en vertu de la relation de récurrence

$$\Gamma(a+1) = a \Gamma(a),$$

il suffit d'établir la relation des compléments lorsque la partie réelle de a est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, pour qu'elle soit par là même générale.

Les démonstrations les plus habituelles de la relation des compléments sont au nombre de trois. La première consiste naturellement à utiliser le développement en

⁽¹⁾ On trouve des notions sur la fonction gamma dans tous les cours d'Analyse. Il a été publié plusieurs monographies sur ce sujet. Citons seulement : *La Fonction Gamma (Théorie, histoire, bibliographie)*, par M. Godefroy, Gauthier-Villars, 1901.

⁽²⁾ La plus grande partie des résultats démontrés en passant au cours du présent article sont dus à Euler.

produit de $\sin \pi a$; ou bien, si l'on part de la définition comme intégrale définie et que l'on ait égard à la seconde des égalités écrites ci-dessus, le développement en série de fractions de son inverse. La seconde donnée dans tous les cours, consiste à déterminer par le calcul des résidus la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$. La troisième enfin, consiste à montrer que cette dernière intégrale est bien égale à $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ lorsque a est rationnel, ce qui se fait aisément puisque l'on est ramené à la quadrature d'une fraction rationnelle; la différence des deux fonctions est alors une fonction qui admet une infinité de zéros dans une aire où elle est holomorphe : elle est identiquement nulle (si l'on se borne aux valeurs réelles, la continuité suffit pour établir ce point) ⁽¹⁾.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. — POSONS

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = f(a).$$

On a évidemment par le changement de x en $\frac{1}{x}$: $f(a) = f(1-a)$. Il suffit donc de considérer les valeurs de a dont la partie réelle est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

On a :

$$f(a) = \lambda^a \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+\lambda x} dx;$$

d'où, en multipliant par $\frac{\lambda^{-a} d\lambda}{1+\lambda}$ et intégrant de 0 à ∞ :

$$f^2(a) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+\lambda)(1+\lambda x)} d\lambda dx.$$

⁽¹⁾ Voir pour ces démonstrations : MERAY, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, tome II.

De même

$$f(a)f\left(\frac{1}{2}-a\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}x^{a-1}}{(1+\lambda)(1+\lambda x)}d\lambda dx.$$

Soit

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{(1+\lambda)(1+\lambda x)}=\frac{1}{1+\lambda}-\frac{x}{1+\lambda x}.$$

On a

$$\int_0^\infty\psi(\lambda)d\lambda=\frac{\log x}{x-1},\quad\int_0^\infty\lambda^{-\frac{1}{2}}\psi(\lambda)d\lambda=\frac{\pi}{1+x^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc en premier lieu

$$f^2(a)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\log x}{x-1}dx,$$

$$f^2\left(\frac{1}{2}-a\right)=\int_0^\infty\frac{x^{a-\frac{1}{2}}\log x}{x-1}dx,$$

d'où

$$f^2(a)+f^2\left(\frac{1}{2}-a\right)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\log x}{x^2-1}dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{4t^{2a-1}\log t}{t-1}dt=4f^2(2a).$$

On a en second lieu

$$f(a)f\left(\frac{1}{2}-a\right)=\pi\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x^2}dx=2\pi f(2a).$$

Il suit de là :

$$f^2(a)+4\pi^2\frac{f^2(a)}{f^2(a)}=4f^2(a).$$

Posons

$$f(a)=\frac{\pi}{\varphi(a)};$$

il vient

$$\varphi^2(2a)=4\varphi^2(a)[1-\varphi^2(a)],$$

d'où en dérivant :

$$4 \varphi(2a) \varphi'(2a) = 8 \varphi(a) \varphi'(a) [1 - 2 \varphi^2(a)]$$

et

$$\frac{\varphi'^2(2a)}{1 - \varphi^2(2a)} = \frac{\varphi'^2(a)}{1 - \varphi^2(a)}.$$

Or cherchons ce que devient le second membre lorsque a tend vers zéro; $f(a)$ dans le voisinage de l'origine est la somme de $\frac{1}{a}$ et d'une série entière en a ; $f(a)$ est donc équivalent à $\frac{1}{a}$ et $\frac{f'(a)}{f(a)}$ à $-\frac{1}{a}$. Par suite, $\varphi(a)$ tend vers zéro, et $\varphi'(a)$ égal à $-\frac{\pi f'(a)}{f^2(a)}$, vers π . Le second membre tend donc vers π^2 .

On aura donc dans une région suffisamment voisine de l'origine (pour qu'aucun rapport ne prenne une forme indéterminée) :

$$\frac{\varphi'^2(a)}{1 - \varphi^2(a)} = \frac{\varphi'^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \varphi^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \dots = \frac{\varphi'^2\left(\frac{a}{2^m}\right)}{1 - \varphi^2\left(\frac{a}{2^m}\right)} = \dots = \pi^2.$$

On a par suite, dans la même région :

$$\varphi'' = -\pi^2 \varphi;$$

d'où

$$\varphi(a) = A \cos \pi a + B \sin \pi a;$$

faisant $a = 0$, on trouve

$$A = 0, \quad B = 1;$$

donc

$$\varphi(a) = \sin \pi a.$$

Cette dernière égalité, établie dans une région suffisamment proche de l'origine, s'étend partout à l'aide de $\varphi^2(2a) = 4 \varphi^2(a) (1 - \varphi^2(a))$; ce qui termine la démonstration.

Faisons une remarque supplémentaire. On a

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} \log x}{x-1} dx = f^2(a) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a};$$

on en conclut en intégrant :

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1 - x^{-a}}{1-x} dx = \pi \cot \pi a.$$

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^a \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx.$$

où la partie réelle de a est comprise entre -1 et $+1$ et θ entre $-\pi$ et $+\pi$.

Posons

$$g(x, \theta) = \frac{\sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1}.$$

On vérifie, par un calcul facile, l'identité

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = g + 3x \frac{\partial g}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

d'où l'on conclut

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial \theta^2} = \int_0^{\infty} x^a g dx + 3 \int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \int_0^{\infty} x^{a+2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx.$$

La première intégrale est I ; les autres s'obtiennent en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx &= -(a+1) \int_0^{\infty} x^a g dx = -(a+1)I, \\ \int_0^{\infty} x^{a+2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx &= \\ &= -(a+2) \int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx = (a+1)(a+2)I. \end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial \theta^2} = [1 - 3(a+1) + (a+1)(a+2)]I = a^2 I.$$

Par conséquent

$$I = A \sin a \theta,$$

car I est fonction impaire de θ .

Il s'agit maintenant de calculer A . Nous montrerons à cet effet que $\int_0^\infty \frac{(x^a - 1) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx$ tend vers zéro, quand θ tend vers π .

Ce dernier point résulte de ce que

$$\int_0^\infty \frac{(x^a - 1) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx = \int_0^1 \frac{(x^a - 2 + x^{-a}) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx,$$

ce qui est inférieur en valeur absolue à

$$\sin \theta \int_0^1 \frac{|x^a - 2 + x^{-a}|}{(1-x)^2} dx$$

(la dernière intégrale a bien un sens, car pour $x = 1$, l'élément différentiel est fini).

Pour calculer $\int_0^\infty \frac{\sin \theta dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1}$ on pose

$$x = -\cos \theta + \sin \theta \cot \varphi;$$

on trouve ainsi que cette intégrale est égale à θ .

Donc $A \sin a \theta - \theta$ tend vers zéro quand θ tend vers π :

$$A = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

Finalement :

$$\int_0^\infty \frac{x^a \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi} \sin a \theta.$$

Faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ et posant $x = t^{\frac{1}{2}}$, il vient :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \frac{\alpha+1}{2}};$$

c'est bien la formule qu'il fallait démontrer.

TROISIÈME DÉMONSTRATION. — Nous serons plus concis au sujet de la troisième démonstration.

Posons :

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-u \cos \theta} \cos(u \sin \theta) u^{\alpha-1} du = \int_0^{\infty} \varphi(u, \theta) u^{\alpha-1} du,$$

$$g(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-u \cos \theta} \sin(u \sin \theta) u^{\alpha-1} du = \int_0^{\infty} \gamma(u, \theta) u^{\alpha-1} du.$$

La partie réelle de α est supposée positive, θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Grâce à ces égalités, on trouve, en intégrant par parties :

$$f'(\theta) = -\alpha g(\theta), \quad g'(\theta) = \alpha f(\theta).$$

D'où, eu égard à ce qui passe pour $\theta = 0$:

$$f(\theta) = \Gamma(\alpha) \cos \alpha \theta, \quad g(\theta) = \Gamma(\alpha) \sin \alpha \theta.$$

Telles sont les valeurs de nos deux intégrales. Remarquons que la définition de $g(\theta)$ conserve un sens

lorsque la partie réelle de α est comprise entre -1 et 0 , et il est aisé de voir qu'on a encore dans ce cas la deuxième formule ci-dessus.

Faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\Delta(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} \cos u \, du = \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2},$$

$$E(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} \sin u \, du = \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

La partie réelle de α est comprise entre 0 et 1 dans $\Delta(\alpha)$; entre -1 et 1 dans $E(\alpha)$.

Considérons sous forme d'intégrales : $\Gamma(\alpha)$; $\Delta(\alpha)$; $E(\alpha)$ d'une part; $\Gamma(1-\alpha)$; $\Delta(1-\alpha)$; $E(1-\alpha)$ de l'autre. Formons le produit d'une intégrale du premier groupe par une intégrale de l'autre; nous employons à cet effet le procédé utilisé dans notre première démonstration, et d'ailleurs classique. Nous obtenons de la sorte :

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

$$\Delta(\alpha) \Delta(1-\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

$$E(\alpha) E(1-\alpha) = \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta(\alpha) E(1-\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1} - x^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-x} dx,$$

$$E(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+x} dx,$$

$$\Gamma(\alpha) \Delta(1-\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+x} dx.$$

Considérons par exemple l'une ou l'autre des deux dernières formules : elle s'écrit en tenant compte de la première et des valeurs trouvées pour $\Delta(a)$ et $E(a)$:

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) \cos \frac{\pi a}{2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Gamma(a) \Gamma(1-a) \sin \pi a &= \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) \sin \frac{\pi a}{2} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \Gamma\left(\frac{a}{2^m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2^m}\right) \sin \frac{\pi a}{2^m} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \pi. \end{aligned}$$

La relation des compléments est donc démontrée.

On peut remarquer aussi qu'elle résulte directement, étant données les expressions de $\Delta(a)$ et $E(a)$, de la deuxième ou de la troisième des six formules. Mais nous avons attendu jusqu'ici pour faire remarque : c'est que les deuxième, troisième et quatrième formules sont moins immédiates à obtenir que les trois autres. En effet, l'application brutale du procédé indiqué plus haut conduit alors à des intégrales dénuées de sens ; il convient donc, pour obtenir ces trois formules, de le modifier. On peut par exemple introduire dans l'une des intégrales une exponentielle $e^{-\alpha u}$ où l'on fait ensuite tendre α vers zéro. On peut aussi, au lieu de considérer les intégrales prises de zéro à ∞ , les supposer prises de 0 à une certaine limite finie (que l'on fera croître ensuite indéfiniment), et employer le mode de raisonnement utilisé ailleurs pour le cas particulier des intégrales de Fresnel (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XLVI, p. 34).