

LÉON POMEY

Sur une extension des séries de Bertrand

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 281-283

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__281_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D2b]

SUR UNE EXTENSION DES SÉRIES DE BERTRAND ;

PAR LÉON POMEY.

1. On sait former (voir E. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, et C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 288 à 300) des séries numériques de moins en moins rapidement convergentes. Les plus connues sont celles de J. Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \sum \frac{1}{n \cdot (\text{Log } n)^{1+\rho}}, \quad \dots, \quad \sum \frac{1}{n \cdot \Lambda_m n (\text{Log}_m n)^\rho},$$

en prenant pour ρ une *constante* > 0 et en posant

$$\begin{aligned} \text{Log } \text{Log } n &= \text{Log}_2 n, & \text{Log } \text{Log}_2 n &= \text{Log}_3 n, & \dots, \\ \Lambda_m n &= \text{Log } n \cdot \text{Log}_2 n \dots \text{Log}_m n. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on les utilise notamment pour reconnaître si une série donnée Σu_n est convergente; en effet soit Σv_n l'une de ces séries convergentes; d'après un théorème classique, si à partir d'une certaine valeur de n on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série Σu_n sera aussi convergente; on développe donc les deux rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et l'on compare leurs valeurs respectives en négligeant les termes d'ordre supérieur (ce qui conduit en particulier à la règle de Gauss). D'ailleurs pour effectuer ces développements, on peut se servir

des formules connues (voir JORDAN, *loc. cit.*) que voici

$$\begin{aligned}\text{Log}_m^\rho(n+1) &= \text{Log}_m^\rho n \left(1 + \frac{\rho}{n \Lambda_m n} \right), \\ \frac{(n+1)^\rho}{n^\rho} &= 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho(\rho-1)}{2n^2} + \dots, \\ \frac{(n+1) \cdot \Lambda_m(n+1) \cdot \text{Log}_m^\rho(n+1)}{n \Lambda_m n \cdot \text{Log}_m^\rho n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \text{Log} n} + \dots + \frac{1+\rho}{n \Lambda_m n} + \frac{\varepsilon}{n^2}.\end{aligned}$$

2. Cela posé, employons cette méthode pour démontrer l'existence d'une série peu différente par sa forme de la série $\sum \frac{1}{n^{1+\rho}}$ mais moins rapidement convergente, avec cette particularité que l'exposant $1+\rho$ soit variable ET TENDE VERS L'UNITÉ.

Telle est, par exemple, la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log \log n}}}$, où r est une constante positive arbitraire.

En effet, pour établir sa convergence, appelons u_n son terme général $\frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log_2 n}}}$ et formons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On trouve par quelques calculs que le lecteur restituera, sans grande peine, la relation

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{r}{\log_2 n \cdot \log_2(n+1)} \\ &\quad \times [\log n \cdot \log_2(n+1) - \log_2 n \cdot \log(n+1)] + \dots,\end{aligned}$$

et pour le crochet, le développement

$$\frac{1}{n} - \frac{\log_2 n}{n} + \dots :$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n \log_2(n+1)} + \dots$$

Comparons ce rapport au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ relatif à la série de Bertrand Σv_n convergente, où $v_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$ avec $\alpha = 1 + \rho > 1$. Il vient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n \log_2(n+1)} - \frac{\alpha}{n \log n} + \dots,$$

quantité qui, à partir d'une valeur suffisamment grande de n , devient et reste positive quelles que soient les constantes r et ρ .

Donc la série Σu_n est bien convergente.

3. On pourrait opérer d'une manière analogue avec les autres séries de Bertrand, en remplaçant de même dans chacune la quantité *fixe* ρ par une quantité *qui tende vers zéro* (comme nous venons de le faire en remplaçant ρ par $\frac{r}{\log_2 n}$ dans la première de ces séries).

Les nouvelles séries ainsi formées permettront à leur tour, comme les séries de Bertrand, de former par la même méthode de nouveaux critères de convergence analogues à celui de Gauss.