

J. LEMAIRE

Concours d'agrégation de 1922

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 27-34

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__27_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR J. LEMAIRE

(*suite*) (¹).

IV. Soient Δ, Δ' deux génératrices fixes, de même

(¹) La partie de solution que nous publions ici, avec l'énoncé correspondant, forme *un tout* et il n'est pas nécessaire, pour la compréhension, de connaître le début du problème. Le lecteur le trouvera dans notre numéro de juillet dernier, page 385.

système, de l'hyperboloïde à une nappe (H) ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Une génératrice G, du second système, les rencontre en M et M'. Montrer qu'il existe deux points ω , ω' d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Soit θ le point de rencontre de Δ et de la génératrice parallèle à Δ' . Trouver la relation qui existe entre $O\omega$ et $O\theta$.

Former l'équation de la surface (S_H) lieu des points ω , ω' lorsque Δ et Δ' varient.

Cette surface est indépendante du système de génératrices considéré.

Il n'existe pas de couple Δ , Δ' auquel correspond une infinité de points ω .

IV. Les équations des génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde pouvant s'écrire

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + 1 \right) = \frac{z}{c} + \frac{y}{b}, \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) = \frac{z}{c} - \frac{y}{b}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{x}{a} + 1 \right) = \frac{z}{c} - \frac{y}{b}, \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) = \frac{z}{c} + \frac{y}{b}, \end{cases}$$

les coordonnées d'un point de la quadrique s'expriment comme il suit à l'aide des paramètres λ , μ des généra-

trices qui y passent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a(1 + \lambda\mu)}{1 - \lambda\mu}, \\ y = \frac{b(\lambda - \mu)}{1 - \lambda\mu}, \\ z = \frac{c(\lambda + \mu)}{1 - \lambda\mu}; \end{array} \right.$$

λ et λ' étant les paramètres des deux génératrices données Δ et Δ' , si μ est celui d'une génératrice variable G de l'autre système, les expressions ci-dessus sont les coordonnées de M , et celles de M' sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{a(1 + \lambda'\mu)}{1 - \lambda'\mu}, \\ y' = \frac{b(\lambda' - \mu)}{1 - \lambda'\mu}, \\ z' = \frac{c(\lambda' + \mu)}{1 - \lambda'\mu}. \end{array} \right.$$

La condition pour que MM' soit vu d'un point $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit est

$$\begin{aligned} & \left(X - a \frac{1 + \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(X - a \frac{1 + \lambda'\mu}{1 - \lambda'\mu} \right) \\ & + \left(Y - b \frac{\lambda - \mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(Y - b \frac{\lambda' - \mu}{1 - \lambda'\mu} \right) \\ & + \left(Z - c \frac{\lambda + \mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(Z - c \frac{\lambda' + \mu}{1 - \lambda'\mu} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & [-(X + a)\lambda\mu + X - a] [-(X + a)\lambda'\mu + X - a] \\ & + [(-Y\lambda + b)\mu + Y - b\lambda] [(-Y\lambda' + b)\mu + Y - b\lambda'] \\ & + [-(Z\lambda + c)\mu + Z - c\lambda] [-(Z\lambda' + c)\mu + Z - c\lambda'] = 0. \end{aligned}$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit μ , on

doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} (X+a)^2 \lambda \lambda' + (Y\lambda - b)(Y\lambda' - b) + (Z\lambda + c)(Z\lambda' + c) = 0, \\ (X^2 - a^2)(\lambda + \lambda') + (Y\lambda - b)(Y - b\lambda') \\ \quad + (Y\lambda' - b)(Y - b\lambda) \\ \quad + (Z\lambda + c)(Z - c\lambda') + (Z\lambda' + c)(Z - c\lambda) = 0, \\ (X-a)^2 + (Y-b\lambda)(Y-b\lambda') + (Z-c\lambda)(Z-c\lambda') = 0, \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \lambda \lambda' (X^2 + Y^2 + Z^2) + (2aX + a^2) \lambda \lambda' \\ \quad + (cZ - bY)(\lambda + \lambda') + b^2 + c^2 = 0, \\ (\lambda + \lambda')(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(bY + cZ) \lambda \lambda' \\ \quad - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda') - 2bY + 2cZ = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + (b^2 + c^2) \lambda \lambda' \\ \quad - (bY + cZ)(\lambda + \lambda') - 2aX + a^2 = 0. \end{array} \right.$$

Ce système peut être ramené simplement à deux équations du premier degré et à une du second degré, ce qui établit l'existence des deux points ω et ω' .

Surface (S_H). — En éliminant λ et λ' , on forme l'équation de la surface lieu des points ω et ω' quand les génératrices Δ et Δ' varient :

$$(S_H) \left| \begin{array}{ccc} (X+a)^2 + Y^2 + Z^2 & cZ - bY & b^2 + c^2 \\ -2bY - 2cZ & X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 + b^2 - c^2 & -2bY + 2cZ \\ b^2 + c^2 & -bY - cZ & (X-a)^2 + Y^2 + Z^2 \end{array} \right| = 0.$$

Cette équation représente une surface du sixième degré tricirculaire, indépendante du système de génératrices considéré. En y supposant $c = 0$, on retrouve l'équation de la surface (S_E) obtenue dans la deuxième partie.

Pour qu'une génératrice $L(\mu')$ soit parallèle à $\Delta'(\lambda')$, on doit avoir

$$1 - \lambda' \mu' = 0 \quad \text{ou} \quad \mu' = \frac{1}{\lambda'},$$

de sorte que les coordonnées du point θ commun à Δ et L sont

$$(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \frac{\lambda' + \lambda}{\lambda' - \lambda}, \\ y = b \frac{\lambda\lambda' - 1}{\lambda' - \lambda}, \\ z = c \frac{\lambda\lambda' + 1}{\lambda' - \lambda}. \end{array} \right.$$

Le point θ' commun à Δ' et à la génératrice L' parallèle à Δ est diamétralement opposé à θ .

Relation entre $O\omega$ et $O\theta$. — Les équations (1) peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(\lambda + \lambda')(bY - cZ) \\ \quad - 4a\lambda\lambda'X - 2a^2\lambda\lambda' - 2(b^2 + c^2) = 0, \\ (\lambda + \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2\lambda\lambda'(\lambda + \lambda')(bY + cZ) \\ \quad - 2(\lambda + \lambda')(bY - cZ) - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda')^2 = 0, \\ -2\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\lambda\lambda'(\lambda + \lambda')(bY + cZ) \\ \quad + 4a\lambda\lambda'X - 2a^2\lambda\lambda' - 2(b^2 + c^2)\lambda^2\lambda'^2 = 0; \end{array} \right.$$

en ajoutant membre à membre, on élimine les termes du premier degré en X , Y , Z , et l'on obtient

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 4a^2\lambda\lambda' \\ & - 2(b^2 + c^2)(\lambda^2\lambda'^2 + 1) - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda')^2 = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 + b^2 - c^2) \\ & - 2a^2(\lambda + \lambda')^2 - 2b^2(\lambda\lambda' - 1)^2 - 2c^2(\lambda\lambda' + 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 + b^2 - c^2 \\ & = 2 \times \frac{a^2(\lambda + \lambda')^2 + b^2(\lambda\lambda' - 1)^2 + c^2(\lambda\lambda' + 1)^2}{(\lambda - \lambda')^2}, \end{aligned}$$

ou finalement

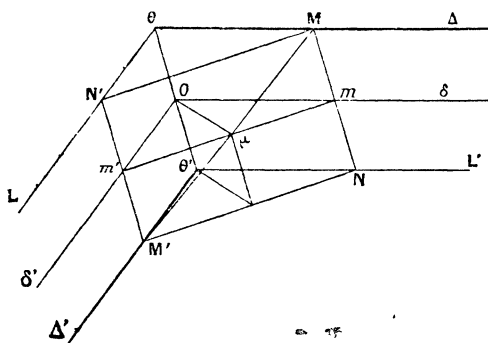
$$\overline{O\omega}^2 + R^2 = 2\overline{O\theta}^2,$$

R désignant le rayon de la sphère de Monge de l'hyperboloïde.

Démonstration géométrique. — Par chacune des génératrices Δ et Δ' , menons le plan parallèle à l'autre, ces deux plans parallèles sont tangents aux points diamétralement opposés θ et θ' et déterminent les génératrices L et L' parallèles à Δ' et Δ .

Le plan équidistant des précédents coupe (H) suivant une hyperbole (h), d'asymptotes δ et δ' parallèles à Δ et Δ' , qui est le lieu du milieu μ de MM' . Parmi les génératrices n'appartenant pas au même système que Δ et Δ' , choisissons celle pour laquelle $\theta M = \theta' M'$, et construisons le parallélogramme $MNV'N'$ dont les sommets N et N' sont sur L' et L et dont les côtés MN et $M'N'$ sont parallèles à $\theta\theta'$; si MN et $M'N'$ coupent δ

Fig. 2.



et δ' en m et m' respectivement, $O\mu = \alpha$ est le demi-axe transverse de (h), et $\mu m = \mu m' = \beta$, le demi-axe non transverse, et le premier théorème d'Apollonius permet d'écrire

$$R^2 = \overline{O\theta}^2 + \alpha^2 - \beta^2,$$

de sorte que la relation à établir peut se mettre sous la forme

$$\overline{O\theta}^2 - \overline{O\omega}^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Considérant successivement les génératrices MM' , θL , $\theta' L'$, nous voyons que les points ω et ω' sont communs à la sphère de diamètre MM' , et aux plans perpendiculaires à L en θ , et à L' en θ' . Les angles $\widehat{M\omega M'}$, $\widehat{\omega\theta L}$, $\widehat{\omega\theta' L'}$ étant donc droits, nous pouvons écrire

$$\overline{\omega N}^2 = \overline{\omega\theta'}^2 + \overline{\theta' N}^2 = \overline{\omega\theta'}^2 + \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\overline{\omega N'}^2 = \overline{\omega\theta}^2 + \overline{\theta N'}^2 = \overline{\omega\theta}^2 + \alpha^2 + \beta^2;$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{\omega N}^2 + \overline{\omega N'}^2 &= \overline{\omega\theta}^2 + \overline{\omega\theta'}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 \\ &= 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$2\overline{\mu\omega}^2 + 2\overline{\mu N}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

et, en remplaçant $\omega\mu$ par μM qui lui est égal,

$$2\overline{\mu M}^2 + 2\overline{\mu N}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

ou

$$\overline{NM}^2 + \overline{NM'}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

ou

$$4\overline{O\theta}^2 + 4\beta^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

et finalement

$$\overline{O\theta}^2 - \overline{O\omega}^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

C. Q. F. D.

Rappelons que l'existence des points ω et ω' a été établie dans la première partie.

Si nous considérons trois génératrices G, G_1, G_2 du système autre que celui de Δ et Δ' , les points ω et ω' sont communs aux sphères ayant pour diamètres les segments $MM', M_1M'_1, M_2M'_2$ déterminés sur ces génératrices par Δ et Δ' , et comme les centres de ces sphères appartiennent à une hyperbole (h), ils ne peuvent être en ligne droite, et il n'existe que deux tels points, réels ou imaginaires, pour deux génératrices Δ et Δ' , jamais une infinité.

Intersection de (H) et de (S_H). — Pour que le point ω relatif à Δ et Δ' soit sur (H), il est d'abord nécessaire qu'il soit sur l'une de ces droites, puisqu'en considérant la génératrice passant en ω et s'appuyant sur les deux précédentes, on a un angle $\widehat{M\omega M'}$ qui doit être droit. Supposons donc ω sur Δ : tout segment MM' déterminé sur une génératrice de l'autre système devant être vu de ω sous un angle droit, Δ et Δ' doivent être orthogonales, et ω doit être le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et Δ' .

Ainsi, *les points de (H) appartenant à (S_H) sont les pieds des perpendiculaires communes aux génératrices orthogonales de même système.* Si G est la génératrice de l'autre système passant par un tel point ω , l'angle $\widehat{\Delta\omega G}$ est droit, et ω est sur la sphère de Monge de (H); dans ces conditions, les deux génératrices Δ et L , qui se croisent en θ , sont perpendiculaires et θ est aussi sur la sphère; cela résulte d'ailleurs de la relation entre $Q\omega$ et $O\theta$.

Ainsi (S_H) *passé par la biquadratique commune à l'hyperboloïde et à sa sphère de Monge.* Le reste de l'intersection est imaginaire.

(La fin prochainement.)