

R. GOORMAGHTIGH

Sur une généralisation des théorèmes de Jamet

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 254-260

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2_254_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O^{12e}]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE JAMET ;

PAR R. GOORMAGHTIGH.

Un Mémoire publié en 1887 par M. V. Jamet dans
les *Annales de l'École Normale supérieure* ⁽¹⁾ con-

(¹) Série 3, t. IV, supplément.

tient trois théorèmes remarquables qu'on peut énoncer ainsi :

Si deux courbes triangulaires symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même triangle de symétrie (ou deux courbes de Lamé d'indice n_1 et n_2 ayant mêmes axes) se touchent en un point, leurs courbures en ce point sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$.

Si deux surfaces tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même tétraèdre de symétrie (ou deux surfaces de Lamé d'indices n_1 et n_2 ayant même axes) se touchent en un point, leurs indicatrices en ce point sont homothétiques, le rapport d'homothétie étant $(n_2 - 1)^{\frac{1}{2}} : (n_1 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Si deux courbes tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même tétraèdre de symétrie, se touchent en un point, leurs plans osculateurs en ce point coïncident et leurs courbures sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$.

1. Considérons maintenant ⁽¹⁾ les courbes ayant pour équation, en coordonnées cartésiennes,

$$(1) \quad \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^n = 0,$$

f_1, f_2, f_3 désignant trois fonctions quelconques des deux variables x, y . A chaque valeur de l'indice n , il correspond une courbe (1) ayant en un point donné une tangente donnée. Dérivant (1) par rapport à x , on a l'équa-

⁽¹⁾ Une note présentée à l'Académie des Sciences (18 novembre 1918) résume les résultats qui suivent ainsi que quelques autres généralisations des théorèmes de Jamet.

tion

$$(2) \quad \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' \right) = 0,$$

qui, combinée avec (1), donne lieu aux relations

$$(3) \quad \frac{\alpha_1 [f_1(x, y)]^{n-1}}{\Phi_1(x, y, y')} = \frac{\alpha_2 [f_2(x, y)]^{n-1}}{\Phi_2(x, y, y')} = \frac{\alpha_3 [f_3(x, y)]^{n-1}}{\Phi_3(x, y, y')},$$

dans lesquelles les fonctions Φ ne dépendent que de x, y, y' . D'autre part, dérivons encore (1) par rapport à x , nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' \right)^2 \\ + \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-1} \\ \times \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f_i}{\partial y} y'' \right) = 0, \end{aligned}$$

qui, par des calculs faciles et eu égard à (3), peut se mettre sous la forme

$$nK - L + \frac{J}{\rho} = 0,$$

où ρ désigne le rayon de courbure de (1) au point (x, y) et où K, L, J sont des fonctions de x, y, y' seuls. La dernière relation donne lieu aux théorèmes suivants :

Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions données de deux variables; si trois courbes

$$\sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]' = 0,$$

d'indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs

rayons de courbure ρ_1, ρ_2, ρ_3 correspondant à ce point sont liés par la relation

$$(4) \quad \frac{n_2 - n_3}{\rho_1} + \frac{n_3 - n_1}{\rho_2} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_3} = 0.$$

Si quatre des courbes considérées sont tangentes en un même point, le rapport anharmonique de leurs courbures en ce point est égal à celui de leurs indices.

2. APPLICATIONS. — a. Coordonnées barycentriques. — On déduit des développements précédents des propriétés identiques pour les courbes dont l'équation en coordonnées barycentriques s'écrit

$$\sum_1^3 \sigma_i [f_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3)]^n = 0.$$

Quand les fonctions f sont linéaires et quand on prend $n_3 = 1$, $1 : \rho_3$ est nul, et la relation (4) donne le théorème de Jamet.

b. Courbes $ax^l + by^m + c = 0$. — Soient A et B les points où la tangente en un point M de la courbe

$$(5) \quad ax^l + by^m + c = 0$$

coupe les axes Ox, Oy, D et E ceux où la normale coupe ces axes, A', B' les points où cette normale rencontre les perpendiculaires élevées en A sur Ox et en B sur Oy; posons A'D = q , B'E = p . Pour étudier la courbure de (5) au point M, prenons

$$f_1(x, y) = x^{\frac{l}{m}}, \quad f_2(x, y) = y, \quad f_3(x, y) = 1.$$

Lorsque $n_1 = m$, (1) donne la courbe (5); pour $n_2 = 1$

et $n_3 = \frac{m}{l}$, on a des paraboles dont les équations ont les formes

$$ax^m + by^l + c = 0, \quad ax + by^{\frac{m}{l}} + c = 0;$$

d'après une propriété connue, on aura donc

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{l}{m} \right), \quad \frac{1}{p_3} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{l} \right)$$

et, par suite ⁽¹⁾,

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1-l}{p} + \frac{1-m}{q}.$$

c. *Courbes* $\lambda_1 r_1'' + \lambda_2 r_2'' = a$. — Soient (a_1, b_1) , (a_2, b_2) les coordonnées de deux points F_1, F_2 du plan et posons

$$f_1(x, y) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}, \\ f_2(x, y) = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}, \quad f_3(x, y) = 1;$$

on obtient alors les courbes dont l'équation en coordonnées bipolaires a la forme

$$(6) \quad \lambda_1 r_1'' + \lambda_2 r_2'' = a.$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$ cette équation représente respectivement une ovale de Descartes et un cercle. Soient M un point de la courbe (6), F_1' et F_2' les points où les perpendiculaires élevées sur MF_1 et MF_2 en F_1 et F_2 rencontrent la normale en M à la courbe, F_1'' et F_2'' ceux où les perpendiculaires élevées en F_1' et F_2' sur la normale coupent les droites MF_1 et MF_2 , N et T les intersections de la normale avec F_1, F_2 et F_1'', F_2'' . Les points N et T sont les centres de courbure du cercle et de l'ovale de Descartes, qui correspondent aux cas de $n = 2$ et

(1) R. GODFREY, *Journal de l'École Polytechnique*, 1892, p. 37.

$n = 1$ et qui touchent la courbe considérée en M ; on aura donc, C désignant le centre de courbure de la courbe (6) en M ,

$$\frac{1}{MC} = \frac{n-1}{MN} + \frac{2-n}{MT}.$$

Pour $n = \frac{3}{2}$, la division MNTC est harmonique.

3. Les développements du paragraphe 1 s'étendent sans difficulté au cas des surfaces; on obtient alors ce théorème :

Si trois surfaces

$$\begin{aligned} & \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n \\ & + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n + \alpha_4[f_4(x, y, z)]^n = 0, \end{aligned}$$

correspondant aux indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs directions asymptotiques en ce point sont en involution et leurs courbures moyennes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont liées par la relation.

$$(n_2 - n_3)\sigma_1 + (n_3 - n_1)\sigma_2 + (n_1 - n_2)\sigma_3 = 0.$$

Si l'on suppose les fonctions f linéaires et si l'on pose $n_3 = 1$, on retrouve encore le théorème de Jamet.

4. Considérons enfin les courbes gauches ayant pour équations cartésiennes

$$\begin{aligned} \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n &= 0, \\ \beta_2[\varphi_2(x, y, z)]^n + \beta_3[\varphi_3(x, y, z)]^n + \beta_4[\varphi_4(x, y, z)]^n &= 0, \end{aligned}$$

où f et φ désignent des fonctions données.

Si par un point M , où se touchent trois de ces courbes, on mène une parallèle δ à l'un des axes de coordonnées et que, sur les binormales des trois

courbes, on prend, à partir de M, les segments MB₁, MB₂, MB₃ égaux à leurs rayons de courbure, les plans menés par B₁, B₂, B₃ perpendiculairement à MB₁, MB₂, MB₃ déterminent sur δ les segments MD₁, MD₂, MD₃ liés par la relation

$$\frac{n_2 - n_3}{MD_1} + \frac{n_3 - n_1}{MD_2} + \frac{n_1 - n_2}{MD_3} = 0.$$

Considérons en particulier deux triangles de l'espace, ainsi que les courbes Γ_n intersections des cônes projetant de deux points fixes quelconques deux courbes triangulaires symétriques d'indices n , ayant les triangles donnés pour triangles de symétrie; deux courbes Γ_{n_1} et Γ_{n_2} tangentes en un point ont même plan osculateur en ce point. Si, dans le théorème qui précède, on suppose f et φ linéaires et qu'on pose $n_3 = 1$, on voit que les courbures de Γ_{n_1} et Γ_{n_2} sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$. Le théorème de Jamet s'obtient quand les triangles et points donnés sont des faces et les sommets opposés d'un tétraèdre.