

E. LAINÉ

Sur les transformations de contact

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 212-216

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__212_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[P²6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(Suite) (1);

PAR E. LAINÉ.

11. Par une T. C. convenablement choisie, on peut donc toujours ramener une équation différentielle du second ordre à la forme

$$R = 0.$$

Il en résulte comme plus haut qu'une équation différentielle du second ordre n'a pas d'invariants par rapport au groupe des T. C.

Il est facile de voir que cette propriété ne s'étend pas au delà du second ordre. Ainsi les seules équations du troisième ordre qu'on puisse ramener, par une T. C. prolongée, à la forme

$$\frac{d^3 Y}{dX^3} = 0,$$

sont nécessairement, comme le montre un calcul immé-

(1) Cf. *N. A.*, janvier 1924, p. 131; février 1924, p. 177.

diat, de la forme

$$\frac{d^3 \gamma}{dx^3} + A r^3 + B r^2 + C r + D = 0,$$

où A, B, C et D sont certaines fonctions des seules variables x, y, p ⁽¹⁾.

La méthode des T. C. ne permettra donc d'intégrer, à partir du troisième ordre, que des classes particulières d'équations différentielles. Mais on pourrait chercher à généraliser cette méthode de la façon suivante :

Prenons, pour simplifier, le cas du second ordre, et soit

$$(23) \quad Y(x, y, p, r) = 0 \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \neq 0 \right)$$

une équation différentielle. Proposons-nous de déterminer trois autres fonctions $X(x, y, p, r)$, $P(x, y, p, r)$ et $R(x, y, p, r)$ telles que les équations

$$(24) \quad \begin{cases} X = X(x, y, p, r), & Y = Y(x, y, p, r), \\ P = P(x, y, p, r), & R = R(x, y, p, r) \end{cases}$$

entraînent, pour un choix convenable des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, les deux relations différentielles

$$(25) \quad \begin{cases} dY - P dX = \lambda_1(dy - p dx) + \lambda_2(dp - r dx), \\ dP - R dX = \mu_1(dy - p dx) + \mu_2(dp - r dx), \end{cases}$$

les fonctions X, Y, P et R étant supposées essentiellement distinctes. On voit comment l'existence d'un tel système de fonctions permettrait d'établir une correspondance entre les intégrales de deux équations différentielles, l'une en (X, Y, P, R), l'autre en (x, y, p, r), déduite de la première par les formules (24). L'équation (23) serait ainsi ramenée immédiatement à la

(1) Cf. S. LIE, *loc. cit.*, p. 85.

forme

$$Y = 0,$$

comme dans le cas des équations du premier ordre.

Si les équations (25) pouvaient être vérifiées, les équations (24) définiraient une transformation qui, sans être une T. C. prolongée $\left(\frac{\partial Y}{\partial r} \neq 0\right)$, c'est-à-dire sans conserver les contacts du premier ordre, conserverait les contacts du second ordre; on aurait bien ainsi généralisé la notion de transformation de contact. Nous allons voir que cette généralisation est impossible.

Nous voulons que les fonctions X, Y, P et R soient distinctes, d'après leur signification même. Mais il est bien facile de montrer, en particulier, que les fonctions X et Y doivent être distinctes en vertu des équations (25) si λ_1 et λ_2 ne sont pas tous deux nuls. En effet, si X et Y n'étaient pas distinctes, l'expression $dY - P dX$ ne contiendrait que deux variables indépendantes, et admettrait par suite un facteur intégrant; il existerait donc une fonction U de x, y, p, r , telle que, en désignant par α et β des coefficients respectivement proportionnels à λ_1 et λ_2 , on aurait

$$dU = \alpha(dy - p dx) + \beta(dp - r dx),$$

d'où, en identifiant les deux membres et éliminant α et β ,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial p} = 0,$$

et par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial p} = 0, \quad dU = 0.$$

Les fonctions X et Y sont donc nécessairement distinctes.

Ceci posé, les équations (25) montrent que l'on a au moins deux relations de la forme

$$Y = \varphi(X, x, y, p), \quad P = \psi(X, x, y, p);$$

donc si X ne dépendait pas de r , il en serait de même de Y : par suite $\frac{\partial X}{\partial r} \neq 0$.

Prenons alors comme nouvelles variables indépendantes x, y, p et X . On tire de la première équation (25)

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial X}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lambda_1 p - \lambda_2 r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lambda_2,$$

d'où, en éliminant λ_1 et λ_2 ,

$$(26) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial y} + r \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0,$$

ou, puisque

$$\psi = P = \frac{\partial \varphi}{\partial X},$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial x} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial y} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial p} = 0.$$

Dérivons par rapport à X l'équation (26), où r est une certaine fonction de X, x, y, p ; la comparaison avec (27) donne de suite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

et l'on déduit ensuite de (26)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

et enfin

$$Y = \varphi(X),$$

ce qui est impossible. Ainsi toute transformation plane qui conserve les contacts du second ordre est une T. C. prolongée.

Plus généralement, on montre, par un raisonnement identique, que toute transformation plane qui conserve les contacts d'ordre n conserve aussi les contacts d'ordre $n - 1$. On en déduit, par récurrence, que toute transformation plane qui conserve les contacts d'ordre n est une T. C. prolongée.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème que M. Goursat a établi en utilisant les propriétés des systèmes de Pfaff (1). Il en résulte qu'il est impossible de généraliser dans cette direction la théorie des transformations de contact; cette théorie ne fournit donc une méthode générale d'intégration que pour les équations différentielles des deux premiers ordres.

(*La fin prochainement.*)