

Concours d'agrégation de 1923

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 144-157

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__144_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGREGATION DE 1925.

Calcul différentiel et intégral.

Soit D une droite mobile qui engendre une surface S non développable.

1° On demande la condition nécessaire et suffisante pour que, en chaque position de D , les tangentes aux lignes asymptotiques de S , passant aux différents points de D , forment un paraboloides P . On montrera que D reste parallèle à un plan fixe.

Les surfaces S correspondantes constitueront la classe des surfaces S_0 .

2° Conditions : a. Pour que le paraboloides P ait constamment ses deux plans directeurs rectangulaires.

b. Pour que la direction diamétrale de P soit indépendante de D .

3° L_1, L_2, L_3 étant trois lignes asymptotiques quelconques d'une surface S_0 , montrer qu'entre les rayons de torsion ⁽¹⁾ respectifs T_1, T_2, T_3 de ces lignes, aux points où elles rencontrent une même génératrice D , existe une relation linéaire, dont les coefficients ne dépendent pas de D .

4° Dans quel cas deux asymptotiques d'une surface S_0 seront-elles à torsion constante ?

5° Oz étant perpendiculaire au plan directeur commun à tous les paraboloides P , on appelle θ l'angle que fait avec Oz la normale à S_0 au point M et T le rayon de torsion ⁽²⁾ de l'asymptotique L qui passe en M . Le point M_1 étant situé sur la même génératrice D que M et décrivant l'asymptotique L_1 quand D varie, soit $r_1 = MM_1$. Démontrer la relation

$$r_1 = \sqrt{C_1} T \sin \theta,$$

C_1 étant indépendant de D .

6° Les coordonnées de M étant exprimées au moyen de l'arc s de L , on exprimera les coordonnées de M_1 au moyen de la même variable. Soit ω l'angle de la normale principale MK à L et de la direction Δ perpendiculaire aux tangentes aux diverses lignes L_1 aux points de D . Démontrer la relation

$$\tan \omega = \frac{1}{T} \frac{dT}{ds}.$$

(1) L'énoncé imprimé remis aux candidats est ainsi rédigé : « ... montrer qu'entre les torsions respectives $T_1, T_2, T_3, \dots$ ».

Bien que cette erreur de texte soit vénielle, et apparaisse immédiatement si les calculs sont bien conduits, elle peut dérouter les candidats.

(2) L'énoncé portait encore « torsion » au lieu de « rayon de torsion ».

SOLUTION

PAR BERTRAND GAMBIER.

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Sur une surface S réglée non développable :

1° A chaque génératrice D correspondent ∞^1 quadriques se raccordant avec S tout le long de D .

2° Parmi elles, une, et une seule, est osculatrice à S tout le long de D ; c'est la quadrique, lieu des tangentes asymptotiques (autres que D) issues des divers points de D .

L'explication qui suit est correcte, mais exige un complément : D et une génératrice voisine D' déterminent ∞^1 quadriques q formant un système linéaire; si D' tend vers D , ces quadriques tendent vers un système linéaire ∞^1 de quadriques Q ayant en chaque point de D un contact simple avec S . Adjoignant à D et D' une nouvelle génératrice D'' voisine des deux premières, D , D' et D'' déterminent une quadrique q_1 et une seule; quand D' et D'' tendent toutes deux, séparément, vers D , la quadrique q_1 tend vers une quadrique Q_1 bien déterminée, osculatrice à S tout le long de D . Le raisonnement a besoin d'être complété par la démonstration de l'existence effective des limites indiquées.

On peut démontrer, géométriquement et rigoureusement, ces résultats de bien des façons :

Sur la génératrice D choisie, marquons trois points quelconques M_1 , M_2 , M_3 et trois tangentes quelconques à S , M_1T_1 , M_2T_2 , M_3T_3 ; traçons sur S des courbes arbitraires C_1 , C_2 , C_3 tangentes respectivement en M_1 , M_2 , M_3 à M_1T_1 , M_2T_2 , M_3T_3 . Une généra-

trice D' , distincte de D , voisine ou non de D , coupe C_1 , C_2 , C_3 en M_1 , M_2 , M_3 respectivement. Les trois droites $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, $M_3 M'_3$ déterminent une quadrique et une seule q , contenant d'ailleurs D et D' . La génératrice de q issue d'un point M , variable sur D , rencontre D' en un point M' . Supposons maintenant que D' tende vers D ; $M_1 M'_1$ tend vers $M_1 T_1$, de sorte que q tend vers la quadrique Q déterminée par $M_1 T_1$, $M_2 T_2$, $M_3 T_3$; la génératrice MM' de q issue de M , tend vers une droite MT , génératrice de Q , coupant S en deux points infiniment voisins, donc tangente à S : S et Q se raccordent donc en tous les points de D . La droite D étant donnée, Q ne dépend plus que de l'orientation de $M_1 T_1$, $M_2 T_2$, $M_3 T_3$ chacune dans le plan tangent correspondant: ces quadriques Q forment donc un système linéaire ∞^1 .

Imaginons écrite l'équation générale d'une quadrique Q de ce système; on peut trouver dans ce système une quadrique et une seule q_1 , contenant une nouvelle génératrice D' de S , voisine ou non de D . En chaque point M de D passe une génératrice et une seule de q_1 , distincte de D ; cette génératrice est tangente à S au point M et coupe de nouveau S en un point M' situé sur D' ; si nous imaginons que D' se rapproche de plus en plus de D , chaque droite telle que MM' , toujours tangente à S en M et la coupant en un nouveau point de plus en plus voisin de M , tend, comme on sait, vers une position limite bien déterminée, à savoir la tangente asymptotique MT , autre que D , issue de M dans le plan tangent à S en ce point M . Comme toutes les droites MM' sont constamment sur une même quadrique q_1 , leurs positions limites sont aussi sur une même quadrique Q_1 .

On remarquera d'ailleurs qu'un plan quelconque

passant par M coupe S et q_1 suivant deux courbes ayant un contact simple en M et ayant un nouveau point commun μ' situé sur D' , voisin de M si D' est voisin de D . Donc les sections planes de S et Q_1 par un plan quelconque sont osculatrices au point où leur plan coupe D .

Q_1 est un hyperboloïde à une nappe, ou un paraboloïde. Si Q est un paraboloïde, le plan directeur mene par D coupe le plan de l'infini suivant une droite, autre que D , qui est génératrice de Q_1 , donc tangente (asymptotique) à S : le plan directeur du paraboloïde est donc le plan asymptote de S relatif à D . Si, quelle que soit D , Q_1 est toujours un paraboloïde, la section de S par le plan de l'infini est enveloppe de tangentes asymptotiques, donc ligne asymptotique de S . N'oublions pas que les lignes asymptotiques se conservent dans une transformation homographique. Si une surface Σ , réglée ou non, admet une section plane comme ligne asymptotique particulière, ou bien cette section est une droite, ou bien la surface se raccorde avec le plan de la section tout le long de cette section. Or pour la surface S les plans asymptotes sont tous distincts du plan de l'infini pour les génératrices à distance finie, donc la première hypothèse est réalisée : les points à l'infini de S sont repartis sur une droite, autrement dit la surface admet un plan directeur.

Reciproquement, l'existence d'un plan directeur entraîne l'existence sur S d'une droite (non génératrice) à l'infini, laquelle est tangente asymptotique et appartient à chaque quadrique Q_1 : ces quadriques sont toutes des paraboloïdes. Il ne sera plus désormais question que d'une surface réglée S_0 à plan directeur, surface non cylindrique.

La recherche des lignes asymptotiques d'une telle surface, au lieu d'une équation de Riccati, ne dépend plus que d'une équation linéaire; il semblerait donc que nous devions effectuer deux quadratures pour les obtenir. En réalité il n'y en a qu'une à effectuer, car les génératrices de la surface appartiennent à un complexe linéaire : elles rencontrent en effet toutes la droite à l'infini du plan directeur. M. Picard a établi dès 1877 que, pour toute surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, une quadrature unique est nécessaire pour obtenir les lignes asymptotiques : on trouvera la démonstration soit aux *Annales de l'École Normale* (1877) soit au tome I de l'Analyse de M. Picard ⁽¹⁾. Si L, L_1, L_2 sont trois asymptotiques particulières rencontrant une génératrice variable D en M, M_1, M_2 le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ ou, si l'on préfère, $(M_1 M_2 M \infty)$, reste constant si D balaie S_0 . On peut écrire les équations paramétriques de la surface S_0 d'une façon particulière, de façon que la quadrature se trouve automatiquement effectuée : ceci se rattache aux travaux de M. Cartan sur les systèmes différentiels et à la notion de *classe* introduite par ce mathématicien. Donnons-nous arbitrairement une courbe L et une direction de plan Π arbitraire : en chaque point M de L , la génératrice D sera l'intersection

(¹) Le raisonnement de M. Picard suppose que le complexe ne soit pas *spécial* : on peut construire *a priori*, par calculs algébriques ou différentiations, une courbe particulière, rencontrant chaque génératrice en *deux* points, et asymptotique particulière de la surface. Cette courbe représente donc en réalité *deux* asymptotiques et l'équation de Riccati s'intègre par une quadrature. Si le complexe devient spécial, la courbe se réduit à l'axe du complexe, qui doit être considéré comme représentant encore *deux* asymptotiques particulières confondues.

du plan osculateur et du plan parallèle à Π ; il est clair que L est une asymptotique particulière de la surface S_0 lieu de D . Le reste s'ensuit.

L'hypothèse (α) peut aussi se résoudre géométriquement. Si *une* génératrice D donne un parabolôide P *équilatère*, on peut remarquer que S et P ont même point central (même si P n'est pas équilatère), et que ce point central C s'obtiendra dans le cas présent en prenant la génératrice de P perpendiculaire au plan directeur de S_0 ; cette génératrice est tangente asymptotique pour S_0 . Si *toutes* les génératrices D donnent un parabolôide équilatère, C décrit la ligne de striction : cette ligne se trouve courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction Δ normale au plan directeur : mais Δ étant toujours direction asymptotique, la tangente à la courbe lieu de C est toujours parallèle à Δ , donc la ligne de striction est une droite perpendiculaire au plan directeur; S_0 est un *conoïde droit*; la réciproque est évidente, car l'axe est génératrice de chaque parabolôide.

Un calcul simple, guidé par un peu de géométrie, retrouve ces résultats aisément. Soient les équations

$$(S) \quad X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

où x, y, z, a, b, c dépendent du paramètre u .

Nous calculons aisément

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} D \equiv |x' a x''| + v |x' a a'| + |a' a x''| \\ \quad \quad \quad - v^2 |a' a a'|, \\ D' \equiv |x' a a'|, \quad D' = 0; \end{array} \right.$$

D' est supposé non nul identiquement; l'équation des asymptotiques est donc

$$(2) \quad \frac{dv}{du} = \Delta + v \Delta_1 - v^2 \Delta_3,$$

où $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ ne dépendent que de u . La tangente asymptotique au point (u, v) a pour équations

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{X - x - av}{x' - a'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)a} \\ &= \frac{Y - y - bv}{y' - b'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)b} \\ &= \frac{Z - z - cv}{z' + c'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)c}, \end{aligned}$$

u constant et v variant seul, les dénominateurs des rapports égaux (3) sont des trinomes du second degré en v si $\Delta_2 \neq 0$; donc les parallèles aux diverses tangentes, menées d'un point fixe, engendrent un cône du second degré; sur ce cône, quatre génératrices ont pour rapport anharmonique celui des quatre v correspondants. Sur la droite D les quatre points M ont aussi pour rapport anharmonique celui des quatre v , et de plus, si v augmente indéfiniment, la génératrice correspondant au point M tend à devenir parallèle à D : on en déduit que les tangentes MT décrivent un hyperboloïde à une nappe. Si $\Delta_2 \equiv 0$, les dénominateurs se réduisent au premier degré, les droites MT sont toutes parallèles à un même plan, et pour les mêmes raisons que plus haut, déduites des rapports anharmoniques, elles engendrent un paraboloïde P. Or $\Delta_2 \equiv 0$ revient à $[aa'a''] \equiv 0$, ce qui exprime que les droites D restent parallèles à un même plan.

Pour une surface S_0 on peut donc écrire

$$S_0 \quad \begin{cases} X = v, \\ Y = u + mv, \\ Z = z. \end{cases} \quad m, z \text{ fonctions de } u,$$

L'équation des asymptotiques

$$(4) \quad \frac{dv}{du} = \frac{z''}{2m'z'} + \frac{v}{2} \left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'} \right)$$

s'intègre en écrivant

$$(5) \quad C = \int \frac{z'' du}{2\sqrt{m' z'^3}} \quad v = C \sqrt{\frac{z'}{m'}}.$$

On peut écrire les équations de la tangente MT asymptotique

$$(6) \quad \frac{\frac{\lambda - x}{dv}}{\frac{du}{du}} = \frac{\lambda - u - mX}{1 + m'v} = \frac{Z - z}{z'},$$

où $\frac{dv}{du}$ a pour valeur (4).

L'équation du paraboloïde P est

$$(7) \quad \frac{(\lambda - u - mX)z' - (Z - z)}{\lambda z' - \frac{Zz''}{m'z'}} = \frac{m'(Z - z)}{\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'}\right)(Z - z) + z'}.$$

L'un des plans directeurs est horizontal, l'autre a pour équation

$$(8) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'}\right)[(\lambda - mX)z' - Z] = m'z'X - \frac{Zz''}{2z'}.$$

2. L'hypothèse (a) donne $m'' = 0$, d'où $m = A + Bu$, A et B étant constants et $B \neq 0$. Les équations

$$(9) \quad X = v, \quad Y = u + (A + Bu)v, \quad Z = z$$

montrent que pour $v = -\frac{1}{B}$ on obtient $X = -\frac{1}{B}$, $Y = -\frac{\lambda}{B}$ qui est donc l'axe du conoïde droit obtenu.

La quadrature (5) est immédiate.

Pour l'hypothèse (b), on peut, sans particulariser, supposer l'axe de P, déjà horizontal, parallèle à OY. On a donc

$$(10) \quad \frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'} = 0, \quad z = Km + K_1.$$

où K et K_1 sont constants. On a la surface

$$(11) \quad \begin{cases} X = v, \\ Y = u + m v, \\ Z = K m, \end{cases}$$

obtenue en supprimant K_1 , ce qui revient à un simple glissement le long de Oz . La résolution en u et m de (11) donne

$$(12) \quad u = Y - \frac{XZ}{K}, \quad m = \frac{Z}{K}.$$

L'équation de la surface est donc

$$(13) \quad Y = aZX + f(aZ),$$

où a est une constante arbitraire et f une fonction arbitraire. La quadrature (5) s'obtient encore immédiatement. On a une construction géométrique très simple de la surface (13), obtenue en considérant dans le plan xOy la droite à un paramètre

$$y = \mu x + f(\mu).$$

On trace dans le plan xOy une courbe arbitraire et on imprime à chaque tangente une translation parallèle à Oz , proportionnelle à la pente de cette tangente. La courbe et la surface obtenues sont simultanément soit transcendantes, soit algébriques, soit unicursales. Cette construction géométrique montre qu'il n'y a pas de surface réglée non développable satisfaisant simultanément aux deux hypothèses (a), (b) (1). Mais on peut obtenir dans l'hypothèse (b) une surface qui soit un conoïde oblique : il suffit que les tangentes transportées

(1) Ou plutôt si la courbe du plan xOy , étudiée au point de vue *tangentiel*, se réduit à un point, la surface S_0 correspondante est un paraboloides *équilatère*. Mais c'est une solution banale, tout comme le paraboloides *non équilatère* trouvé aussitôt après.

rencontrent toutes une droite dont on prendra les équations sous la forme

$$Y = \lambda X, \quad Z = \mu X.$$

Mais on ne trouve qu'une solution banale, à savoir un paraboloïde hyperbolique non équilatère : *a priori* il est bien évident que toute génératrice D du paraboloïde fait constamment retrouver comme paraboloïde P associé la surface elle-même.

3. Pour traiter aisément les dernières parties, il suffit d'employer la méthode indiquée plus haut. La courbe L est le lieu du point (x, y, z) ; nous utilisons le trièdre de Serret-Frenet (a, a', a'') , (b, b', b'') , (c, c', c'') avec les relations bien connues entre les cosinus, le rayon de courbure R et le rayon de torsion T de la courbe.

La surface S_0 , à plan directeur horizontal,

$$(14) \quad X = x + c' \rho, \quad Y = y - c \rho, \quad Z = z,$$

admet L pour asymptotique particulière. La matrice

$$(15) \quad \begin{vmatrix} a + \frac{b' \rho}{T} & a' - \frac{b \rho}{T} & a'' \\ c' & -c & 0 \end{vmatrix}$$

fournit le dS^2 de la surface,

$$(16) \quad dS^2 = \left[1 + \frac{2c'' \rho}{T} + (b^2 + b'^2) \frac{\rho^2}{T^2} \right] ds^2 \\ - 2b'' \left(1 + c'' \frac{\rho}{T} \right) ds d\rho + (c^2 + c'^2) d\rho^2$$

les paramètres directeurs de la normale, mineurs de (15),

$$(17) \quad \xi = a'' c, \quad \eta = a' c', \quad \zeta = a'' \left(c'' + \frac{\rho}{T} \right).$$

On a

$$(18) \quad D \equiv -\alpha''^2 \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{T} \right), \quad D' \equiv -\alpha''^2 \frac{1}{T}, \quad D'' \equiv 0.$$

L'équation des asymptotiques

$$(19) \quad \frac{\rho}{T} \frac{dT}{ds} - 2 \frac{d\rho}{ds} = 0$$

donne

$$(20) \quad \rho = K \sqrt{T} \quad (1),$$

où K est une constante arbitraire; L s'obtient pour $K = 0$.

D'après Enneper, $\pm \sqrt{-R_1 R_2}$, où R_1 et R_2 sont les rayons principaux de S_0 , doit donner la torsion de l'asymptotique générale. D'après Gauss

$$R_1 R_2 = \frac{(EG - F^2)^2}{DD'' - D'^2},$$

et ici

$$\pm \sqrt{-R_1 R_2} = \pm \frac{EG - F^2}{D'} = \pm \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{D'}.$$

La torsion est donc

$$(21) \quad \pm \left(T + 2c'' \rho + \frac{\xi^2}{T} \right) = \pm (T + 2c'' K \sqrt{T} + K^2).$$

Or pour $K = 0$ on doit retrouver T , donc on doit prendre le signe $+$. Considérons donc les trois asymptotiques L , L_1 , L_2 obtenues pour $K = 0$, K_1 , K_2 . On a

$$(22) \quad \begin{cases} T_1 = T + 2c'' K_1 \sqrt{T} + K_1^2, \\ T_2 = T + 2c'' K_2 \sqrt{T} + K_2^2, \end{cases}$$

d'où la relation linéaire annoncée

$$(23) \quad (T_1 - T - K_1^2) K_2 - (T_2 - T - K_2^2) K_1 = 0.$$

(1) Si T est positif, on prend K réel; si T est négatif, on prend K imaginaire pur.

4. Si T est constant, T_1 ne peut être constant que si c'' est constant. L'indicatrice des torsions de L est un petit cercle, donc L est une hélice circulaire d'axe Oz et S_0 est la surface minima bien connue d'escalier, hélicoïde gauche à plan directeur. Les asymptotiques sont les trajectoires orthogonales des génératrices.

5. On a

$$\sin \theta = \sqrt{c^2 + c'^2},$$

$$r_1 = \rho \sqrt{c^2 + c'^2} = K \sqrt{T} \sin \theta.$$

6. La tangente asymptotique MT a pour équations

$$(24) \quad \frac{X - x - c' \rho}{a + \left(b' + \frac{c'}{2} \frac{dT}{ds}\right) \frac{\rho}{T}} = \frac{Y - y + c \rho}{a' - \left(b + \frac{c}{2} \frac{dT}{ds}\right) \frac{\rho}{T}} = \frac{Z - z}{a''}.$$

La considération des dénominateurs montre que les paramètres directeurs α, β, γ de Δ doivent être pris de sorte que

$$\alpha = \lambda \left(b + \frac{c}{2} \frac{dT}{ds}\right), \quad \beta = \lambda \left(b' + \frac{c'}{2} \frac{dT}{ds}\right),$$

et alors on a aussitôt

$$\gamma = \lambda \left(b'' + \frac{c''}{2} \frac{dT}{ds}\right).$$

Mais alors Δ est située dans le plan déterminé par MK normale principale et MN normale à S_0 , c'est-à-dire binormale de L .

La droite $M\Delta$ contient le point qui dans ce plan a pour coordonnées

$$1, \quad \frac{1}{2} \frac{dT}{ds},$$

et il est bien clair que

$$(25) \quad \tan \omega = \frac{1}{2} \frac{dT}{ds}.$$

Nota. — Je signalerai pour terminer une formule

générale relative aux surfaces réglées, formule signalée en particulier par M. Bianchi, et qui aurait pu servir, au lieu de celle d'Enneper, à calculer T_1 . Sur une surface réglée S *quelconque*, une génératrice D rencontre deux asymptotiques L et L_1 aux points M et M_1 , tels que $MM_1 = r_1$; soit φ l'angle des normales à S en MM_1 , c'est-à-dire l'angle des plans osculateurs en M et M_1 , on a

$$(26) \quad r_1 = \sin \varphi \sqrt{TT_1}.$$

Ici les normales ont pour cosinus respectifs

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} c, & c', & c'', \\ \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2c''\rho}{T} + \frac{\rho^2}{T^2}}}, & \frac{c'}{\sqrt{\dots}}, & \frac{c'' + \frac{\rho}{T}}{\sqrt{\dots}}. \end{array} \right.$$

On a donc

$$r_1 = \rho \sqrt{c^2 + c'^2} \quad \sin \varphi = \frac{\rho \sqrt{c^2 + c'^2}}{T \sqrt{1 + \frac{2c''\rho}{T} + \frac{\rho^2}{T^2}}},$$

d'où l'on déduit la valeur de T_1 , donnée plus haut, en employant la formule (26) : cette fois on n'apas l'ambiguïté du signe. La formule (26) met de plus en évidence ce fait que toutes les asymptotiques curvilignes ont leur torsion de même signe; ce résultat découle aussi de la valeur (21) déjà trouvée.

Autre solution par M. CH. GUYON.