

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 72-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__72_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + bx + c},$$

où a, b, c désignent des constantes réelles.

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de a, b, c ;

2° Écrire l'intégrale générale, en distinguant les trois cas suivants :

$$b^2 - 4ac > 0,$$

$$b^2 - 4ac = 0,$$

$$b^2 - 4ac < 0;$$

3° Pour que l'intégrale générale soit rationnelle, il faut et il suffit que

$$\frac{4}{b^2 - 4ac}$$

soit le carré d'un entier;

4° L'intégrale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle? Trouver, dans ce cas, les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature, en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver en projection sur le

(73)

plan yOz les lignes asymptotiques de la surface

$$x + y^2 z = \int_0^y (y-t) e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Parmi ces courbes projetées, montrer qu'il y en a une et une seule, délimitant avec Oy et le prolongement de Oz une région d'aire finie.

Évaluer cette aire.

(Poitiers, juillet 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient p, q les dérivées partielles premières d'une fonction z des variables x, y ; P, Q celles de la fonction Z de X, Y , qu'on déduit de la précédente en posant

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad z^2 = Z.$$

Évaluer p, q en fonction de P, Q, X, Y, Z . Appliquer cette transformation à l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \quad xyz(z - px - qy)^3 = pq.$$

Soit (E) l'équation transformée, qui appartient à un type classique. Intégrer cette équation, montrer qu'elle admet une intégrale singulière, indiquer comment sont constituées les multiplicités caractéristiques. En déduire les résultats correspondants dans l'étude de (e).

Faire l'étude directe de l'équation (e), en montrant d'abord qu'elle possède certaines surfaces intégrales du second ordre

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont des constantes, choisies de manière à satisfaire à une relation de forme convenable $F(A, B, C) = 0$.

Écrire le système différentielle qui définit les multiplicités caractéristiques de (e). Intégrer ce système.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On assimile la Terre à un ellipsoïde de révolution, dont les rayons de courbure principaux en un point sont R_1 et R_2 . Évaluer la partie

principale de l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 dS,$$

étendue à toute la surface du globe, en supposant très petit l'aplatissement $\epsilon = 1 - \frac{b}{a}$.

Application $\epsilon = \frac{1}{300}$. Degré d'approximation?

(Poitiers, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE I. — Soient dans un plan deux axes rectangulaires Ox, Oy . On donne une fonction $u(x, y)$ (définie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une courbe fermée sans point double Γ).

Soit C une courbe fermée sans point double quelconque intérieure à Γ ; un sens positif et une origine des arcs ayant été choisis sur C , on désigne par S l'abscisse curviligne d'un point $P(x, y)$ de contour C et par V l'angle de la demi-tangente positive en P et de la demi-droite PU dont l'angle avec Ox est $u(x, y)$:

1° Transformer l'intégrale curviligne $I = \int_C \cos V ds$ en une intégrale double étendue à l'intérieur du contour C (on précisera le sens de parcours adopté dans l'intégration le long du contour);

2° Comment faut-il choisir la fonction u pour que I soit nulle quel que soit C ? Que peut-on dire alors des lignes qui en chacun de leurs points M sont tangentes à la direction MU correspondant à ce point;

3° u étant définie par l'équation implicite

$$x \sin u - y \cos u = 1$$

et C étant une courbe fermée sans point double quelconque telle que les directions PU_1, PU_2 correspondant à l'un quelconque de ses points soient réelles et distinctes, on appelle PU l'une des directions PU_1, PU_2 et l'on suppose que les diverses positions de PU forment une suite continue lorsque P parcourt C . Calculer l'intégrale

curviligne

$$\int_c \cos V \, ds.$$

II. Étant donné un cylindre de révolution indéfini et un point A de sa surface S, on considère toutes les hélices tracées sur S et passant par A :

1° Démontrer que toutes les tangentes (D) de toutes ces hélices peuvent être considérées comme les normales d'une même surface Σ ;

2° Déterminer les lignes de courbure de Σ et les rayons de courbure principaux en un point M de Σ ;

3° Soient C une courbe fermée sans point double dont tous les points sont extérieurs au cylindre donné, V l'angle de la tangente à C en un de ses points avec une droite (D) passant par P; on suppose que lorsque P décrit une fois d'une manière continue le contour C à partir d'une position initiale P_0 , (D) varie d'une manière continue (avec discontinuité éventuelle en P_0). Calculer

$$\int_c \cos V \, ds.$$

N. B. — Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre. Cependant il est recommandé de ne traiter la troisième partie de II qu'après avoir traité I en entier.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' - \left(\frac{1}{4} + ax \right) y = 0,$$

où a est une constante donnée :

1° Trouver une solution de (1) qui reste finie pour $x=0$. Cette solution apparaîtra comme le produit d'une fonction élémentaire par une série entière dont on étudiera la convergence. Cette solution est-elle entièrement déterminée?

2° Comment peut-on en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) sous forme d'un développement en série? Calculer les trois premiers termes de ce développement;

3° Cas particulier où $a=0$.

(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° On donne deux fonctions P et Q des trois variables x, y, z . Comment faut-il choisir la surface S pour que l'intégrale curviligne

$$I = \int_C P dx + Q dy$$

soit nulle pour toute courbe fermée tracée sur S ? Intégrer l'équation aux dérivées partielles trouvée pour

$$P = xy, \quad Q = yz + x,$$

et déterminer la surface intégrale qui passe par l'axe des x ;

2° On considère la portion Σ de la surface $y = x \tanh z$ qui correspond à des valeurs positives de x et de y et à des valeurs de z comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On joint par une courbe Γ tracée sur Σ les points de Σ défini par

$$x = 1, \quad y = 0; \quad x = \xi, \quad y = \eta.$$

Montrer que

$$\delta = \int_{\Gamma} xz dx + (yz + x) dy$$

ne dépend que de ξ, η et non de Γ . Calculer δ en fonction de ξ, η ; valeur de δ pour $\xi = 1, \eta = 1$.

II. Intégrer l'équation

$$(E) \quad p + zq = 2.$$

C étant une courbe fermée quelconque tracée sur une surface intégrale S , montrer que

$$\int_C [4(y + x^2) - z^2] dx + 2z dy = 0.$$

Étant donnés un arc de courbe quelconque tracé sur une telle surface S et un point $M(x, y, z)$ de cet arc, on désigne d'une manière générale par y' la pente $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à la projection de cette courbe sur le plan des x, y au point $m(x, y)$, projection de M . On considère sur S un contour fermé, formé par une portion Q d'une

caractéristique de E et par un autre arc quelconque de Γ . On a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [4(y+x^2)+y'^2] dx - \int_C [4(y+x^2)+y'^2] dx \\ &= \int_{\Gamma} (y'-z)^2 dx. \end{aligned}$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la surface engendrée par les normales principales à la courbe

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6} :$$

- 1° Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface;
2° Calculer les rayons de courbure principaux de cette surface à l'origine.

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° A quelle condition doivent satisfaire les équations P et Q de x et de y pour que l'expression

$$\left(P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx - \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy$$

soit une différentielle totale exacte.

Trouver les fonctions dont cette expression et la différentielle dans chacun des trois cas suivants :

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 & Q &= y, \\ P &= x & Q &= x^2 + y^2, \\ P &= y & Q &= x; \end{aligned}$$

- 2° Trouver les lignes asymptotiques de la surface

$$x = \frac{v^3}{3} - u^3 v, \quad y = \frac{u^3}{3} - v^2 u, \quad z = uv.$$

II. Intégrer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 + x - y - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y + 3z = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On considère les courbes (P) représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'équa-

(78.)

tion $y^2 - 2ax - a^2 = 0$, a étant une constante quelconque. Par un point quelconque du plan, passent deux courbes (P) orthogonales. On demande l'aire du quadrilatère curviligne, situé au-dessus de l'axe des x , qui se trouve limité par les courbes P qui passent aux points

$$(x + 0, \quad y = 1) \quad \text{et} \quad \left(x = \frac{5}{2}, \quad y = 6\right).$$

II. Ox, Oy, Oz désignant trois axes de coordonnées rectangulaires et C une courbe fermée, on considère l'intégrale curviligne

$$\int_C xz \, dx + yz \, dy + \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2} \, dz.$$

On demande la valeur de cette intégrale lorsque la courbe C est entièrement située sur une surface de révolution d'axe Oz .

(Grenoble, novembre 1921.)