NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur les coniques focales

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1 (1922), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__62_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[L²9a]

SUR LES CONIQUES FOCALES;

PAR M. CH. BIOCHE.

A propos de diverses questions de géométrie, on est amené à considérer un système de deux coniques, situées dans des plans rectangulaires, et telles que chacune d'elles ait pour sommets les foyers de l'autre; on les appelle quelquefois *coniques focales*. C'est d'un pareil système qu'il s'agit ici.

1. Si l'on désigne par $2a$ le grand axe, par $2c$ la distance des foyers de l'ellipse, et par $2b$ l'axe non focal, l'hyperbole correspondante a pour axe transverse $2c$, pour distance des foyers $2a$ et pour axe non transverse $2b$.

Il résulte de là que, si l'on projette ces deux coniques sur un plan P passant par l'axe commun et faisant un angle α avec le plan de l'ellipse, l'ellipse obtenue aura pour demi-axes a et $b\cos\alpha$, et l'hyperbole aura pour demi-axes c et $b\sin\alpha$. On en déduit facilement que le carré de la demi-distance des foyers est pour chacune des coniques $a^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha$. Donc ces coniques sont homofocales.

Il est facile de constater que la demi-distance focale commune varie de c à a, quand α varie de o à $\frac{\pi}{2}$.

2. Réciproquement, soient deux coniques homofocales

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 1.$$

Si l'on considère un plan P passant par OX et faisant l'angle α avec le plan des courbes données, l'ellipse peut être considérée comme la projection d'une ellipse de P dont les demi-axes auraient pour carrés

$$a^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 - c^2}{\cos^2 \alpha}.$$

L'hyperbole peut aussi être considérée comme la projection d'une hyperbole, située dans le plan P′ perpendiculaire à P, les carrés des demi-axes seraient pour cette hyperbole

$$d^2 \quad \text{et} \quad \frac{c^2 - d^2}{\sin^2 \alpha}.$$

On peut disposer de α de façon que les coniques obtenues dans les plans P et P″ forment un système de coniques focales; car les équations obtenues en écrivant que les foyers de l'une des coniques sont les sommets de l'autre se réduisent à une seule, qui donne

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{c^2 - d^2}{a^2 - c^2}.$$

Donc deux coniques homofocales peuvent toujours être considérées comme les projections de deux coniques focales.