Agrégation des sciences mathématiques (concours spécial de 1920)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 303-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__303_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. (CONCOURS SPÉCIAL DE 1920.)

Problème d'Analyse.

1° *Déterminer la surface* S *la plus générale dont les normales sont toutes tangentes à un cylindre de révolution* C *de rayon* R. *On calculera les coordonnées* x, y, z *d'un point* M *de* S *en fonction des angles* θ *et* φ *qui définissent la direction de la normale* MN *à* S *en* M, *de sorte que les cosinus directeurs de cette normale soient*

$$\sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos\theta.$$

(*On supposera les trois axes de coordonnées rectangulaires et l'on prendra pour* Oz *l'axe du cylindre* C.)

2° *Déterminer géométriquement les lignes de courbure des surfaces* S.

3° *A quelles relations doivent satisfaire* θ *et* φ *le long d'une de ces lignes de courbure.*

4° *Les normales à la surface* S *sont tangentes, non seulement au cylindre* C, *mais aussi à une deuxième nappe* C′ *de la développée de* S. *Déterminer analytiquement la surface* C′.

5° *Montrer que les sections de* S *et de* C′ *par un plan quelconque parallèle à* xOy *sont des courbes simples.*

6° *Calculer les rayons de courbure principaux de* S *en un point* M *de* S.

7° *On suppose développé le cylindre* C *sur l'un de ses plans tangents, et l'on y prend comme axes la génératrice de contact et le développement de la base du cylindre, les nouvelles coordonnées étant appelées* z *et* σ. *On appelle* I *et* J *les développements des intersections* I_0 *et* J_0 *du cylindre* C *avec les surfaces* C′ *et* S, *et l'on demande de déterminer analytiquement* I *et* J.

8° *On demande la développée de* J.

9° *On demande de déterminer* S *de manière que la courbe* I *soit un cercle.*

Solution par M. ROBERT,

Professeur à l'École primaire supérieure de Poitiers.

1° Nous pouvons envisager cette première partie soit au point de vue ponctuel, soit au point de vue tangentiel. Examinons-les sucessivement.

La normale au point x, y, z a pour équations :

$$\frac{X-x}{\sin\theta\cos\varphi}=\frac{Y-y}{\sin\theta\sin\varphi}=\frac{Z-z}{\cos\theta}.$$

Écrivons que cette normale est perpendiculaire aux deux directions

$$\frac{\partial x}{\partial\theta},\ \frac{\partial y}{\partial\theta},\ \frac{\partial z}{\partial\theta},\quad \text{et}\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi},\ \frac{\partial y}{\partial\varphi},\ \frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

et qu'elle est tangente au cylindre C.

Nous obtenons le système linéaire suivant qui définit les surfaces S :

$$(\mathrm{S})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial\theta}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial y}{\partial\theta}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial\theta}\cos\theta=0,\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\sin\theta\cos\varphi+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\sin\theta\sin\varphi+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\theta=0,\\[2mm] x\sin\varphi-y\cos\varphi=\varepsilon R\end{cases}$$

$$(\varepsilon=\pm 1).$$

Pour intégrer ce système, remarquons qu'il suffit d'en ajouter une solution particulière à la solution générale du système sans second membre :

$$
(\mathrm{S}') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \theta}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial \varphi}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cos\theta = 0,\\
&x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La forme de cette dernière équation nous invite à poser :

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

ρ étant une nouvelle fonction inconnue de θ et φ.

La signification géométrique du système (S') est d'ailleurs immédiate : ce système (S') fournit les surfaces dont les normales rencontrent Oz, c'est-à-dire les surfaces de révolution d'axe Oz. Donc son intégrale générale est de la forme

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = \mathrm{F}(\rho),$$

en appelant ρ une fonction de θ seul.

Pour avoir l'intégrale générale du système (S), il suffit maintenant d'en connaître une intégrale particulière, par exemple une intégrale telle que l'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0, \qquad \cos\theta = 0.$$

Nous aurons alors à déterminer deux fonctions x et y de φ seul à l'aide des conditions :

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi = 0,\\
&x\sin\varphi - y\cos\varphi = \varepsilon\mathrm{R}.
\end{aligned}
$$

On satisfait à ces équations en prenant :

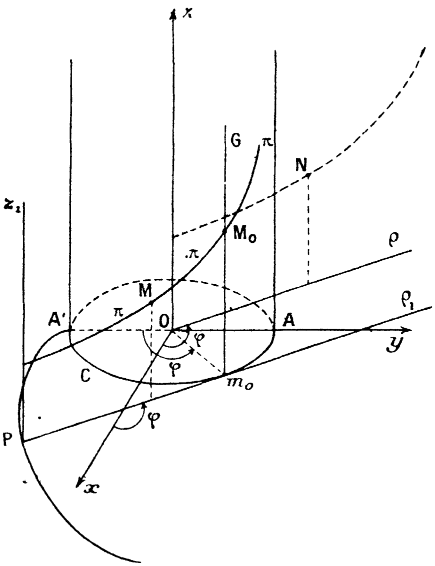
$$x = \varepsilon R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$
$$y = -\varepsilon R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi).$$

Cette surface particulière est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz; la base en est une développante du cercle de centre O et de rayon R.

Nous aurons donc comme solution de notre problème :

$$x = \rho\cos\varphi + \varepsilon R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$
$$y = \rho\sin\varphi - \varepsilon R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$
$$z = F(\rho).$$

D'après la manière même dont nous avons formé les équations de cette surface, nous pouvons en donner la



génération géométrique suivante : Soit M le point de coordonnées x, y, z. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est la somme géométrique de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{ON} : \rho\cos\varphi,\quad \rho\sin\varphi,\quad F(\rho),$$

$$\overrightarrow{OP} : \varepsilon R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),\quad -\varepsilon R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),\quad o.$$

Considérons la demi-droite $O\rho$ du plans xy telle que

$$(Ox,\ O\rho) = \varphi.$$

La section de la surface S′ par le plan $zO\rho$ est la courbe

$$z = F(\rho).$$

Le point P décrit une développante de cercle dans le plan des xy. Menons par le point P les axes $P\rho_1$ et Pz_1 respectivement parallèles aux axes $P\rho$ et Pz et de même sens. Soit π le profil du plan $z_1 P \rho_1$, profil ayant pour équation $z_1 = F(\rho_1)$. Ce profil engendre donc la surface S. D'ailleurs le plan des $z_1\rho_1$ reste constamment normal à la développante de cercle précédente; donc il roule sans glisser sur le cylindre C, et par suite la surface S est une surface moulure.

Examinons maintenant le même problème au point de vue tangentiel. La surface S peut être considérée comme l'enveloppe du plan

$$x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta + f(\theta,\ \varphi) = o.$$

Le point M de contact de ce plan avec la surface S est défini par l'équation précédente, et par les deux suivantes :

$$x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial\theta} = o,$$

$$-x\sin\theta\sin\varphi + y\sin\theta\cos\varphi \qquad + \frac{\partial f}{\partial\varphi} = o.$$

Ces deux dernières équations sont précisément celles de la normale en M à la surface S. Écrivons que cette normale est tangente au cylindre de révolution C, ce qui est très aisé en tenant compte de la dernière équation qui représente la projection de la normale sur le plan des xy.

Nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \varepsilon R \sin\theta \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

on satisfait à cette dernière équation en prenant

$$f = \varepsilon R[\varphi \sin\theta + G(\theta)],$$

$G(\theta)$ désignant une fonction quelconque de θ.

Résolvant les trois équations précédentes et tenant compte de la valeur de f, nous obtenons les coordonnées x, y, z d'un point M de S. Si l'on ne considère pas comme distinctes deux surfaces S symétriques par rapport à l'origine, nous pourrons faire $\varepsilon = +1$. C'est ce que nous supposerons dans la suite. Nous avons alors pour les équations de la surface S :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= R\,\{\sin\varphi - \cos\varphi[\varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta]\},\\ y &= -R\,\{\cos\varphi + \sin\varphi\,[\varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta)]\},\\ z &= R\,\{G'(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta\}.\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons donc les mêmes formules que précédemment; il suffit de poser

$$\begin{aligned} \rho &= -R[G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta],\\ F(\rho) &= R[G'(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta].\end{aligned}$$

Les équations de la normale à S s'écrivent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - z\sin\theta + R[\varphi\cos\theta + G'(\theta)] = 0,\\ &-x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad\qquad\quad + R \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 0.\end{aligned}\right.$$

2° On peut retrouver par la géométrie le mode de génération de la surface S qui vient d'être indiqué. Soit S une surface dont chaque normale est tangente au cylindre C. En chaque point Q du cylindre passe une certaine normale à S, contenue dans le plan tangent en ce point au cylindre C. Nous considérons une congruence de droites formée par une famille de tangentes au cylindre, et nous désirons qu'il existe une famille de surfaces normales aux droites de la congruence.

Si ces surfaces existent, elles admettent des lignes de courbure, définies par la condition que les normales à S le long d'une quelconque de ces lignes forment une surface développable. Cherchons à associer les droites d'une congruence de tangentes au cylindre de manière à obtenir des surfaces développables. Nous obtenons un tel résultat en prenant toutes les tangentes issues des divers points d'une même génératrice; ces tangentes sont alors situées dans un plan tangent au cylindre.

Nous aurons la deuxième famille de développables de la congruence en considérant les courbes (λ) du cylindre qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à la droite QT correspondante.

Les plans focaux de la congruence qui correspondent à la droite QT sont le plan tangent au cylindre et le plan osculateur à celle des courbes précédentes qui passe au point Q. Ces plans sont les plans tangents aux deux développables de la congruence qui passent par la génératrice QT. Mais, d'autre part, ces plans doivent contenir les tangentes principales à la surface S cherchée. Donc ces plans doivent être rectangulaires. Les courbes (λ) sont donc telles que le plan osculateur en chacun de leurs points est normal au cylindre; ce sont des hélices, formant sur le cylindre une famille à un paramètre ([1]). Or chaque ligne de courbure de S est l'intersection de S avec une développable de la congruence; par suite :

a. Les lignes de courbure du deuxième système seront situées dans les plans tangents au cylindre C.

b. Les lignes de courbure du premier système sont les trajectoires orthogonales des tangentes aux hélices (λ). Donc ces lignes de courbure sont des développantes de cercle contenues dans des plans parallèles au plan xOy. Ces lignes de courbure constituent une famille de trajectoires orthogonales des plans tangents au cylindre C. Considérons deux de ces trajectoires qui coupent un plan tangent au cylindre en M et en M'. La distance MM' demeure constante, quel que soit le plan tangent au cylindre C, car le vecteur MM' demeure constamment normal à son déplacement. Il s'ensuit que l'ensemble des trajectoires orthogonales découpe sur un plan tangent au cylindre une figure de forme invariable. On retrouve ainsi la génération de la surface moulure ([2]).

([1]) Ce résultat se généralise immédiatemment : si l'on cherche les surfaces S dont les normales sont tangentes à une surface donnée S_1, on obtiendra une première famille de développables de cette congruence de normales en considérant toutes les développables qui admettent pour arêtes de rebroussement ∞^1 géodésiques de la surface S_1.

([2]) Plus généralement, si l'on cherche les surfaces S dont les normales sont tangentes à une développable donnée Σ, les raisonnements précédents subsistent; on fera rouler sans glisser un plan P sur la développable Σ; un profil Γ quelconque tracé dans ce plan engendrera la surface S la plus générale répondant à la question (surface de Monge). Les deux systèmes de lignes de courbure de S seront encore les sections de S pour les plans tangents à Σ, et les trajectoires orthogonales des précédentes. La deuxième nappe de la surface focale de cette congruence sera engendrée par la développée Γ' du profil Γ : ce sera encore une surface de Monge.

3° Il résulte de ce qui précède que, le long des lignes de courbure situées dans les plans tangents au cylindre C, on a $\varphi = \text{const}$, et pour les autres $\theta = \text{const}$. Cherchons à retrouver analytiquement ces résultats à l'aide des formules d'Olinde Rodrigues. Appelons λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à une surface, et soit d une différentielle qui correspond à un déplacement suivant une ligne de courbure. Un point de la normale au point x, y, z aura des coordonnées de la forme

$$x + \lambda u, \quad y + \mu u, \quad z + \nu u.$$

Nous aurons à exprimer que cette normale possède une enveloppe, c'est-à-dire que l'on a, pour une valeur convenable de u,

$$\frac{d(x + \lambda u)}{\lambda} = \frac{d(y + \mu u)}{\mu} = \frac{d(z + \nu u)}{\nu}$$

ou

$$\frac{dx + u\,d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + u\,d\mu}{\mu} = \frac{dz + u\,d\nu}{\nu}$$
$$= \frac{\lambda(dx + u\,d\lambda) + \mu(dy + u\,d\mu) + \nu(dz + u\,d\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Remarquant que le numérateur du dernier rapport est nul, on a

$$dx + u\,d\lambda = 0, \qquad dy + u\,d\mu = 0, \qquad dz + u\,d\nu = 0.$$

Ce sont les formules d'Olinde Rodrigues. On exprimera que le point x, y, z décrit une ligne de courbure en écrivant que ces équations admettent une racine commune en u.

Développant les calculs, les formules précédentes devienment :

$$\begin{aligned}
&\sin\varphi \,\{ R[\varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta] - u\sin\theta \}\, d\varphi \\
&\quad - \cos\varphi\cos\theta \,\{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \}\, d\theta = 0, \\
&\cos\varphi \,\{ R[\varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta] - u\sin\theta \}\, d\varphi \\
&\quad + \sin\varphi\cos\theta \,\{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \}\, d\theta = 0, \\
&\qquad\qquad \{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \}\, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

On satisfait à ces trois équations en prenant, soit

$$(3)\qquad \begin{cases} d\theta = 0, \\ R[\varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta] - u\sin\theta = 0, \end{cases}$$

soit

$$(4)\qquad \begin{cases} d\varphi = 0, \\ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u = 0. \end{cases}$$

On retrouve bien les lignes de courbure $\theta =$ const. et $\varphi =$ const. (¹). On trouve en outre les deux valeurs de u qui donnent les deux points de contact de la normale avec les deux nappes de la surface focale.

4° La solution de la quatrième partie du problème

(¹) L'équation du plan tangent à la surface est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\cot\theta + R\left[\varphi + \frac{G(\theta)}{\sin\theta}\right] t = 0.$$

Les coefficients ξ de ce plan tangent vérifient l'équation $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial\theta\,\partial\varphi} = 0$; on peut donc affirmer que les courbes coordonnées sont planes et forment un système conjugué. Si l'on pose en outre

$$\xi_1 = \cos\varphi, \qquad \xi_2 = \sin\varphi, \qquad \xi_3 = \cot\theta,$$

on vérifie aisément que

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\varphi}\sqrt{\xi_2 + \xi_2^2 + \zeta_3^2} = 0;$$

donc les courbes coordonnées forment un système orthogonal; comme il est conjugué, il est formé des lignes de courbure.

Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, (Chap. VII).

est fournie par les équations (3) et (4). Un point d'une nappe de la surface focale a pour coordonnées

$$x + u \sin\theta \cos\varphi, \quad y + u \sin\theta \sin\varphi, \quad z + u \cos\theta,$$

où x, y, z ont les valeurs paramétriques précédemment calculées en fonction de θ et de φ, et où u a l'une des valeurs précédentes.

Si l'on prend pour u la valeur définie par la deuxième des équations (3), on trouve aisément pour les coordonnées d'un point de la nappe de la développée :

$$(C) \qquad R \sin\varphi, \quad -R \cos\varphi, \quad \frac{R}{\sin\theta}[G'(\theta) + \varphi \cos\theta].$$

On retrouve bien le cylindre C, et les lignes $\theta =$ const. sont bien des hélices tracées sur ce cylindre.

Si l'on prend pour u la valeur définie par la deuxième des équations (4), on trouve pour les coordonnées d'un point de la deuxième nappe C′ :

$$(C') \left\{ \begin{array}{l} R \sin\varphi - R \cos\varphi[\varphi + G'(\theta) \cos\theta - G''(\theta) \sin\theta], \\ -R \cos\varphi - R \sin\varphi[\varphi + G'(\theta) \cos\theta - G''(\theta) \sin\theta], \\ R[G'(\theta) \sin\theta + G''(\theta) \cos\theta). \end{array} \right.$$

La surface C′ est donc encore une surface moulure, engendrée par la développée du profil π. Ce résultat était d'ailleurs évident géométriquement.

5° Les sections de S et de C′ par des plans horizontaux sont les courbes θ const. de ces deux surfaces. Ce sont des développantes de cercle, d'après ce qui précède.

6° On appelle « rayons de courbure principaux en un point d'une surface » les rayons de courbure des sections normales qui contiennent les directions principales. L'une de ces sections est ici donnée par un plan $\varphi =$ const.; le rayon de courbure correspondant est $R[G(\theta) + G''(\theta)]$, et le centre de courbure correspondant est le point de contact avec C'. L'autre centre de courbure s'obtient aisément en remarquant que les lignes de courbure $\theta =$ const. sont planes et appliquant le théorème de Meusnier. Le centre de courbure d'une de ces lignes de courbure est la projection orthogonale du deuxieme centre de courbure principal, qui est alors situé sur le cylindre C.

On aurait également pu remarquer que les centres de courbure principaux en un point d'une surface coincident avec les points de contact de la normale à cette surface avec les deux nappes de la développée. Les deux rayons de courbure principaux sont donc donnes par les valeurs de u fournies par les équations (3) et (4).

7° Soit M (x, y, z) un point de l'intersection J_0 de S avec C. Les coordonnees x, y, z de ce point satisfont aux équations (1), ainsi qu'à l'équation $x^2+y^2=R^2$, ce qui donne, le long de la courbe J_0,

$$(5) \qquad \varphi + G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta = 0.$$

La courbe I_0 d'intersection de C' et C sera définie de même par la relation

$$(6) \qquad \varphi = G''(\theta)\sin\theta - G'(\theta)\sin\theta.$$

obtenue en écrivant qu'un point de C' est sur le cylindre C.

Designons par P_1 le plan tangent au cylindre C le long de la génératrice passant par $A'(O, -R, O)$. Prenons deux axes dans ce plan P_1 : l'un $A'\sigma$ parallèle à Ox, et l'autre $A'z$ parallèle à Oz. Soit G la génératrice du cylindre C correspondant à la valeur φ. Désignons par M_0 un point de J_0 situé sur G, et soit m_0 sa projection sur le plan des xy. Si nous développons le cylindre sur le plan P_1, le point M_0 a pour coordonnées dans ce plan

$$\sigma = \text{arc}\,A'm_0 = R\varphi$$

et z.

D'où pour les équations de J, en tenant compte de (5),

$$(\mathrm{J})\qquad \begin{cases} \sigma = -R[G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta], \\ z = \ \ R[G'(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta]. \end{cases}$$

On reconnaît là les équations du profil π qui engendre la surface moulure. Le résultat est d'ailleurs évident géométriquement ; en effet, nous savons que la surface S est engendrée par un profil π d'un plan P qui roule sans glisser sur le cylindre C, alors J_0 n'est autre que la courbe dessinée par le profil π sur ce cylindre. Inversement, si l'on déroule le cylindre sur un de ses plans tangents, tous les points de J_0 viendront coïncider avec π. Donc les courbes J et π sont identiques.

L'équation (6), qui nous définit la courbe I_0 d'intersection de C' et de S, fournirait de même l'équation de la courbe I dans le plan P_1 :

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \sigma = R[G''(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta], \\ z = R[G''(\theta)\cos\theta + G'(\theta)\sin\theta]. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, la courbe I n'est autre que le profil π' qui engendre la surface moulure C'. Donc I est la développée de J.

8° Cette partie du problème est résolue ci-dessus. Analytiquement on peut opérer comme suit : Éliminons successivement $G'(\theta)$ et $G(\theta)$ entre les équations donnant le profil J ; nous obtenons :

$$(\Delta)\qquad \sigma\sin\theta + z\cos\theta + RG(\theta) = 0,$$

$$(\Delta')\qquad \sigma\cos\theta - z\sin\theta + RG'(\theta) = 0.$$

Le point (σ, z) est donc à l'intersection des deux droites Δ et Δ'; la courbe J est donc l'enveloppe de la droite Δ.

On trouve de même que le profil I est le lieu du point de rencontre des deux droites :

$$(\Delta') \qquad \sigma\cos\theta - z\sin\theta + RG'(\theta) = 0,$$

$$(\Delta'') \qquad -\sigma\sin\theta - z\cos\theta + RG''(\theta) = 0,$$

ce qui prouve bien que I est la développée de J.

9° Si l'on veut que I soit un cercle, il suffit d'écrire que le rayon de courbure de I est égal à une constante RC_1. Comme I est l'enveloppe de Δ', on a donc

$$R[G'(\theta) + G'''(\theta)] = RC_1,$$

équation différentielle dont l'intégrale générale est de la forme

$$G(\theta) = C_1\theta + C_2 + C_3\cos\theta + C_4\sin\theta,$$

les C étant des constantes. Il est donc facile de déterminer la surface S répondant à la question. Le profil π est alors une développante de cercle.