

A. GULDBERG

Un théorème du calcul des probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 251-254

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__251_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[J2a]

UN THÉORÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS ;

PAR M. A. GULDBERG,

Professeur à l'Université de Christiania.

La probabilité d'un événement E est p , celle de l'événement contraire est q ; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Le nombre d'arrivées le plus probable des E est, d'après le théorème de Bernoulli, μp (voir J. BERTRAND, *Calcul des Probabilités*, p. 71).

Dans un Mémoire ⁽¹⁾ intéressant, mais peu connu, M. T.-C. Simmons a établi le théorème :

« Si le nombre d'arrivées le plus probable de l'évé-

⁽¹⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 26, p. 290.

nement E, dont la probabilité est p , est dans μ épreuves *un*, il est plus probable que le nombre d'arrivées de E soit *plus petit* que *plus grand* que *un*. »

M. Simmons énonce aussi son théorème de la manière suivante :

« Si un événement doit arriver b fois et ne doit pas arriver a fois, $a > b$, dans les mêmes conditions, et si on fait μ épreuves, où μ est un multiple de $(a + b)$, la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus petit que $\mu \frac{b}{a+b}$ est plus grande que la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus grand que $\mu \frac{b}{a+b}$. »

M. Simmons a seulement réussi à établir ce théorème dans le cas où $b = 1$. Son analyse est assez compliquée et longue (33 pages); il pense que le théorème est vrai pour toutes les valeurs de $b < a$. Le théorème de M. Simmons est, il me semble, intéressant et mérite d'être connu. Peut-être un jeune géomètre en pourra-t-il donner la démonstration complète.

Dans les lignes qui suivent, je me permets de faire quelques remarques qui se rattachent à ce problème.

Soit x une quantité pouvant prendre les valeurs distinctes positives x_1 avec la probabilité p_1 , x_2 avec la probabilité p_2 , ..., x_k avec la probabilité p_k , en sorte que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

La valeur moyenne m de la quantité x est définie par l'expression

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k.$$

Soient $x'_1, x'_2, \dots, x'_i$ les valeurs de la quantité x

qui sont plus petites que m et $p'_1, p'_2, \dots, p'_r$ les probabilités correspondantes, et soient $x'_1, x'_2, \dots, x'_t$ les valeurs de la quantité x qui sont plus grandes que m et $p''_1, p''_2, \dots, p''_t$ les probabilités correspondantes. La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $< m$ est définie par l'expression

$$m_1 = \frac{p'_1 x'_1 + p'_2 x'_2 + \dots + p'_r x'_r}{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_r}.$$

La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $> m$ est définie par l'expression

$$m_2 = \frac{p''_1 x''_1 + p''_2 x''_2 + \dots + p''_t x''_t}{p''_1 + p''_2 + \dots + p''_t}.$$

Soit

$$M_1 = \sum_1^r p'_i (m - x'_i),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x , qui sont $< m$, et soit

$$M_2 = \sum_1^t p''_i (x''_i - m),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x , qui sont $> m$.

On a

$$M_2 = M_1$$

car

$$M_2 - M_1 = \sum_1^k p_i (x_i - m) = \sum_1^k p_i x_i - m = 0.$$

De l'égalité

$$\sum_1^r p'_i (m - x'_i) = \sum_1^t p''_i (x''_i - m)$$

ou

$$m \sum_1^r p'_i - \sum_1^r p'_i x'_i = \sum_1^t p''_i x''_i - m \sum_1^t p''_i$$

on tire, si

$$(1) \quad m - m_1 < m_2 - m,$$

l'inégalité

$$(2) \quad \sum_1^r p'_i > \sum_1^t p''_i.$$

On a ainsi la proposition suivante :

« Si la différence entre la valeur moyenne m de la quantité x et la valeur moyenne relative m_1 aux valeurs de x plus petites que m est plus petite que la différence entre la valeur moyenne relative m_2 aux valeurs de x plus grandes que m et la valeur moyenne m de x , la probabilité pour que la quantité x prenne une valeur plus petite que m est plus grande que la probabilité que x prenne une valeur plus grande que m . »

Si le signe d'inégalité en (1) est renversé, le signe d'inégalité (2) est renversé. Si

$$m - m_1 = m_2 - m$$

on a

$$\sum_1^r p'_i = \sum_1^t p''_i.$$