NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificat de physique mathématique

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1 (1922), p. 234-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__234_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *La loi de répartition canonique. On démontrera que c'est la loi de répartition la plus probable dans l'extension en phase de* N *systèmes dont l'énergie totale est fixée. Le nombre* N *est supposé très grand.*

II. *En déduire la relation de Boltzmann entre l'entropie et la probabilité.*

III. *Signification physique des coefficients de la loi de répartition canonique.*

IV. *Généraliser les raisonnements précédents au cas où les équations de la mécanique ne sont plus valables.*

On supposera que, dans ce cas, la probabilité pour que le point représentatif d'un système se trouve dans l'extension en phase $d\Phi$ *soit égale à* $\varphi\, d\Phi$.

φ *est une fonction des coordonnées et des moments définissant la position de l'élément d'extension en phase* $d\Phi$,

fonction qu'on laissera indéterminée. (*Elle se réduit à une constante dans la première partie de la question.*)

FORMULES. — *Première partie.* — Probabilité d'une répartition telle que n_1 systèmes se trouvent dans l'élément d'extension en phase $d\Phi_1$, n_2 dans $d\Phi_2$, ..., n_m dans $d\Phi_m$,

$$(1) \qquad P = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!};$$

la formule de Stirling

$$(2) \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donne, en négligeant les grandeurs petites,

$$(3) \qquad \log P = \text{const.} - \sum n \log n.$$

On partira de la formule (3).

Quatrième partie. — La formule (1) doit être remplacée par

$$(1') \qquad P = \varphi_1^{n_1} \varphi_2^{n_2} \dots \varphi_m^{n_m} \frac{N!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!}.$$

On en déduira la formule

$$(3') \qquad \log P = \text{const.} - \sum n(\log n - \log \varphi + 1).$$

On remplacera la sommation par une intégration et l'on cherchera la répartition la plus probable.

Pour établir la relation de Boltzmann, on supposera l'extension en phase permise invariable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On rappelle que les polynomes de Legendre* (n *entier* > 0) *sont définis par la formule*

$$(1) \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2 - 1)^n.$$

Il est évident qu'un polynome *entier en* μ, *de degré* p, *peut être exprimé comme une combinaison linéaire de* P_0, P_1, ..., P_p. *On propose d'effectuer explicitement ce*

développement pour le polynome μ^p, *sous la forme*

$$(2) \qquad \mu^p = a_0 P_0(\mu) + a_1 P_1(\mu) + \ldots + a_n P_n(\mu) + \ldots + a_p P_p(\mu).$$

1° *Déterminer* a_p *en comparant les termes en* μ^p.

2° *Calculer les autres coefficients en utilisant la formule connue*

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

On aura besoin d'effectuer des intégrales du type

$$J_{p,n} = \int_{-1}^{+1} \mu^p P_n(\mu)\, d\mu.$$

a. $J_{p,p}$ *se déduit du paragraphe* (1°) (*calcul de* a_p).

b. $J_{p,n} = 0$ *si* $p - n$ *est impair.*

c. Pour $p - n =$ *entier pair, former une relation de récurrence entre* $J_{p,n}$ *et* $J_{p-2,n}$, *en utilisant l'équation différentielle de Legendre :*

$$(4) \qquad \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu}\right] + n(n+1)P_n = 0.$$

On multipliera cette équation (4) *par* μ^p, *et l'on intégrera entre* -1 *et* $+1$. *En utilisant deux fois l'intégration par parties du premier terme, on trouvera*

$$(5) \qquad n(n+1)J_{p,n} = p(p+1)J_{p,n} - p(p-1)J_{p-2,n},$$

formule qui ramènera le calcul de $J_{p,n}$ *à celui de* $J_{n,n}$.

En déduire la valeur explicite des coefficients dans la formule (2).

(Strasbourg, juin 1922.)