Nouvelles annales de mathématiques

Joseph Pérès

# À propos de la formule d'Euler-Savary

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 1 (1922), p. 205-208
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__205_1>

[$O^1 8a$]

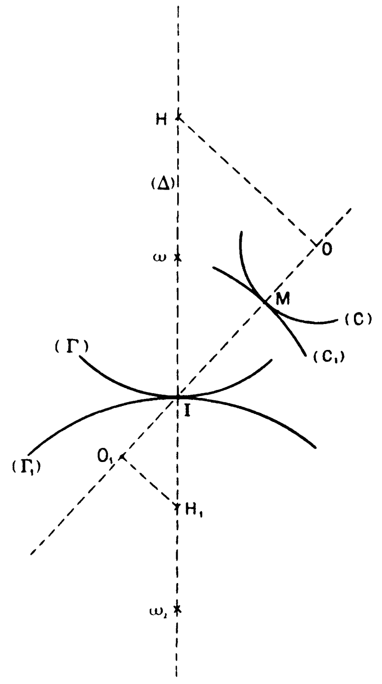
# A PROPOS DE LA FORMULE D'EULER-SAVARY;

PAR M. JOSEPH PÉRÈS.

Il y a bien des manières d'établir la formule, dite d'Euler-Savary, qui détermine le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe, invariable de forme et se déplaçant dans son plan (1). J'indique ici une démonstration, qui m'a paru assez intéressante.

(1) Signalons en particulier la démonstration de M. Kœnigs (*Bull. des Sc. math.*, 1907) qui justifie d'abord, par un raisonnement direct très élégant, la *construction* de Savary.

Fixons d'abord les notations. Soit (P) un plan qui se meut en glissant sur un plan fixe $(P_1)$ et soient $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma)$ la base et la roulante du mouvement. A un instant donné, ces deux courbes se touchent au centre




instantané de rotation correspondant, I; nous nommerons $(\Delta)$ leur normale commune en I, $\omega_1$ et $\omega$ leurs centres de courbure. Une courbe (C) du plan (P) enveloppe, dans le plan $(P_1)$, une courbe $(C_1)$ et, à l'instant considéré, ces deux courbes se touchent en des points tels que M, IM étant normale commune en M à (C) et $(C_1)$; nous nommerons O et $O_1$ les centres de courbure de (C) et $(C_1)$ en M.

Envisageons alors une règle qui, à chaque instant, est disposée suivant IM, un point bien déterminé de cette règle (le milieu par exemple) étant en I; étudions le mouvement de cette règle par rapport à (P) et par rapport à ($P_1$).

Il est évident, d'après les propriétés les plus simples du centre instantané de rotation, que les centres instantanés correspondants sont en H et $H_1$, points de rencontre de ($\Delta$) avec les normales en O et $O_1$ à la règle. Soient, à l'instant considéré, $\alpha$ et $\alpha_1$ les vitesses angulaires de la règle par rapport à (P) et par rapport à ($P_1$), soit $\zeta$ la vitesse angulaire de (P) par rapport à ($P_1$), soit enfin V la vitesse du point I sur ($\Gamma$) ou sur ($\Gamma_1$). On a

$$V = \overline{IH}.\alpha = \overline{IH_1}.\alpha_1,$$

et ces formules ont lieu en grandeur et en signe, pourvu que l'on ait choisi le sens positif des rotations, le sens positif sur ($\Delta$) et, pour mesurer V, le sens positif convenable. On peut donc écrire

$$V = \frac{\alpha}{\dfrac{1}{\overline{IH}}} = \frac{\alpha_1}{\dfrac{1}{\overline{IH_1}}} = \frac{\zeta}{\dfrac{1}{\overline{IH_1}} - \dfrac{1}{\overline{IH}}},$$

ce qui montre que la quantité

$$\frac{1}{\overline{IH_1}} - \frac{1}{\overline{IH}}$$

(dont on retrouve ainsi la signification cinématique simple) est indépendante de la courbe (C) choisie.

En prenant pour courbe (C) la courbe ($\Gamma$), il vient enfin, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\overline{IH_1}} - \frac{1}{\overline{IH}} = \frac{1}{\overline{I\omega_1}} - \frac{1}{\overline{I\omega}}$$

et il suffit de prendre sur IM un sens positif et de nommer $\theta$ l'angle des deux directions positives choisies sur IM et $(\Delta)$ pour en conclure la relation d'Euler-Savary :

$$\cos\theta\left(\frac{1}{\overline{IO_1}}-\frac{1}{\overline{IO}}\right)=\left(\frac{1}{\overline{I\omega_1}}-\frac{1}{\overline{I\omega}}\right).$$