G. Fontené

# Sur deux familles de courbes orthogonales

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 1 (1922), p. 173-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__173_0>

[O2k]

# SUR DEUX FAMILLES DE COURBES ORTHOGONALES;

PAR M. G. FONTENE.

1. Si l'on écrit, pour une fonction $F(z)$ d'une variable complexe,

$$F(z) \equiv P(x, y) + i\, Q(x, y),$$

on sait que les courbes

$$P(x, y) = \text{const.}, \qquad Q(x, y) = \text{const.}$$

forment deux familles de courbes orthogonales; et le résultat obtenu en posant

$$F(z) = (x + y i)^m = \rho^m(\cos m\omega + i \sin m\omega)$$

est bien connu.

On connaît moins un autre exemple donné par Lamé en 1834 (*Journal de l'École Polytechnique*, 23e cahier, p. 244; *Journal de Liouville*, 1re série, t. I, p. 82); Lamé ne dit pas expressément qu'il ait obtenu le résultat dont il s'agit par l'application du procédé précédent à une fonction particulière $F(z)$, mais il n'est pas douteux qu'il en soit ainsi, car il signale ce procédé pour la formation de familles de courbes orthogonales et cite l'exemple indiqué ci-dessus.

La séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire se fait simplement, comme on vient de le rappeler, pour la fonction $z^m$, en introduisant le module et l'argument. Si l'on se rappelle que la recherche de la fonction primitive de $\frac{1}{z}$, à partir de la fonction primitive de $z^m$ pour une valeur quelconque de $m$ autre que $-1$, donne lieu à la formule

$$\lim \frac{z^{m+1}-1}{m+1} = \text{Log}\, z \qquad (\text{pour } m = -1)$$

ou

$$\lim \frac{z^m - 1}{m} = \text{Log}\, z \qquad (\text{pour } m = 0),$$

on est conduit à prévoir que la même séparation se fera aisément pour $\text{Log}\, z$ et l'on pourrait l'effectuer en partant de l'égalité précédente; on a directement

$$\text{Log}\, z = \text{Log}\, \rho(\cos\omega + i\sin\omega) = \text{Log}(\rho e^{i\omega})$$

ou

$$\text{Log}\, z = (\text{Log}\, \rho) + (i\omega).$$

Considérons alors la fonction

$$F(z) \equiv \sum \alpha\, \text{Log}(z - z_1);$$

*en désignant par* $\rho_1, \rho_2, \ldots,$ *et* $\omega_1, \omega_2, \ldots$ *les modules et les arguments des différences* $z - z_1$, $z - z_2, \ldots$, on a

$$F(z) \equiv \sum \alpha\, \text{Log}\, \rho_1 + i \sum \alpha\omega_1.$$

Si $M, M_1, M_2, \ldots$ sont les points qui ont pour affixes $z, z_1, z_2, \ldots$, on voit que les courbes représentées par les équations

$$\sum \alpha\, \text{Log}\, MM_1 = \text{const.},$$

$$\sum \alpha\left(\widehat{x'x,\ MM_1}\right) = \text{const.}$$

forment deux familles de courbes orthogonales.

Lamé écrit :

$$\sum \alpha \operatorname{Log} \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \text{const.},$$

$$\sum \alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y-y_1}{x-x_1} = \text{const.}$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés dans un plan des points fixes* A, B, ..., *on considère, d'une part, les courbes dont les points vérifient la relation*

$$(1) \qquad \overline{\mathrm{MA}}^{\alpha} \times \overline{\mathrm{MB}}^{\beta} \times \ldots = \text{const.},$$

*les exposants, que l'on peut supposer entiers, étant positifs ou négatifs, et, d'autre part, les courbes dont les points vérifient la relation*

$$(2) \qquad \alpha \times (x'x, \mathrm{MA}) + \beta \times (x'x, \mathrm{MB}) + \ldots = \text{const.},$$

*$x'x$ étant un axe quelconque; on a ainsi deux familles de courbes orthogonales.*

Dans la relation (2), la constante est donnée à $k\pi$ près.

**2.** Dans l'Ouvrage qui a pour titre *Sur une classe remarquable de courbes...*, 1873, Darboux a donné au théorème de Lamé de beaux développements, qu'il a reproduits dans son dernier Ouvrage : *Principes de Géométrie analytique.*

Eu égard aux résultats donnés par Darboux, on doit regarder comme cas normal celui où l'on a $\sum \alpha = 0$, les $\alpha$ étant égaux à 1 ou à $-1$; on peut alors écrire

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{MA} \times \mathrm{MB} \times \ldots}{\mathrm{MA'} \times \mathrm{MB'} \times \ldots} = \text{const.},$$

$$(4) \qquad \left(\widehat{\mathrm{MA'}, \mathrm{MA}}\right) + \left(\widehat{\mathrm{MB'}, \mathrm{MB}}\right) + \ldots = \text{const.};$$

les segments A'A, B'B, ... sont des cordes des courbes (4).

Si certains points A', B', ... s'éloignent indéfiniment, la constante de la relation (3) tendant vers zéro, on doit supprimer les facteurs correspondants dans cette relation et remplacer dans la relation (4) les angles correspondants par $(x'x, \text{MA})$, ....

3. Le cas le plus simple est celui des deux familles de cercles orthogonaux données par les relations

$$\frac{\text{MA}}{\text{MA}'} = \text{const.}, \tag{5}$$

$$\left(\widehat{\text{MA}', \text{MA}}\right) = \text{const.}; \tag{6}$$

si le point A' s'éloigne indéfiniment, on a des cercles concentriques et leurs diamètres.

Si AA'BB' est un parallélogramme, les deux familles de courbes orthogonales

$$\text{MA} \times \text{MB} = k.\text{MA}' \times \text{MB}', \tag{7}$$

$$\left(\widehat{\text{MA}', \text{MA}}\right) + \left(\widehat{\text{MB}', \text{MB}}\right) = \text{const.} \tag{8}$$

sont des ellipses de Cassini. Si les points A' et B' s'éloignent indéfiniment, $k$ tendant vers zéro, on obtient des ellipses de Cassini et des hyperboles équilatères :

$$\text{MA} \times \text{MB} = \text{const.}, \tag{9}$$

$$\left(\widehat{\text{AB}, \text{MA}}\right) + \left(\widehat{\text{AB}, \text{MB}}\right) = \text{const.} \tag{10}$$

4. *Cas particulier.* — Soient A, B, C, ... les sommets d'un polygone régulier de $m$ côtés, O son centre, O$x$ un axe polaire dirigé suivant OA, $a$ le rayon du cercle circonscrit. Cherchons les équations en coor-

données polaires des courbes définies par les relations

$$(11) \qquad \text{MA} \times \text{MB} \times \ldots = \text{const.},$$

$$(12) \qquad \left(\widehat{Ox, \text{AM}}\right) + (Ox, \text{BM}) + \ldots = \varphi, \quad \text{à } k\pi \text{ près.}$$

Soient $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ les affixes des sommets du polygone, et $z$ l'affixe du point M; si Z est *la mesure complexe* du vecteur qui a pour origine l'un des sommets et pour extrémité le point M, on a

$$Z = z - z_p,$$

d'où

$$(Z - z)^m = (-1)^m a^m$$

ou

$$Z^m - \ldots + (-1)^m (z^m - a^m) = 0.$$

Le produit des Z est donc $z^m - a^m$, ou

$$(\rho^m \cos m\omega - a^m) + i\rho^m \sin m\omega;$$

de là deux conséquences :

D'une part, le carré du produit des distances du point M aux sommets du polygone est

$$P^2 = (\rho^m \cos m\omega - a^m)^2 + \rho^{2m} \sin^2 m\omega$$

ou

$$(13) \qquad P^2 = \rho^{2m} - 2a^m \rho^m \cos m\omega + a^{2m};$$

*c'est le théorème de Cotes.*

D'autre part, si l'on appelle $\varphi$ la somme des angles $\left(\widehat{Ox, \text{AM}}\right)$, ..., on a

$$(14) \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho^m \sin m\omega}{\rho^m \cos m\omega - a^m}, \qquad \left(\frac{\sin\varphi}{\rho^m \sin m\omega} > 0\right);$$

cette formule peut prendre rang à côté de celle de Cotes.

Il résulte des deux formules précédentes que les équations des courbes de Lamé sont, dans le cas actuel :

$$(15)\qquad \rho^{2m} - 2a^m\rho^m \cos m\omega + a^{2m} = \text{const.},$$

$$(16)\qquad \rho^m \sin(\varphi - m\omega) = a^m \sin\varphi,$$

$\varphi$ étant un paramètre, donné à $k\pi$ près; on peut écrire

$$\frac{\rho^m \cos m\omega - a^m}{\rho^m \sin m\omega} = \text{const.} = \cot\varphi.$$

Pour $m = 2$, on retrouve les ellipses de Cassini qui ont pour foyers les points A et B et les hyperboles équilatères qui ont leur centre au milieu de AB et qui passent en A et B; ces dernières courbes forment un faisceau de coniques.

5. Les courbes de la première famille sont connues depuis longtemps; Serret, qui les a étudiées à divers points de vue, a determiné directement leurs trajectoires orthogonales (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 498). On a pour les premières courbes

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{-a^m \sin m\omega}{\rho^m - a^m \cos m\omega};$$

on a donc, pour les courbes orthogonales,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\rho^m - a^m \cos m\omega}{a^m \sin m\omega},$$

ou (*Recueil d'exercices* de Tisserand)

$$\frac{d\rho}{d\omega} + \rho\frac{\cos m\omega}{\sin m\omega} = \frac{\rho^{m+1}}{a^m \sin m\omega},$$

ce qui est une équation de Bernoulli; on l'écrit

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho^m}\right)}{d\omega} - \frac{1}{\rho^m}\frac{m\cos m\theta}{\sin m\theta} = -\frac{m}{a^m \sin m\theta}.$$

Cette équation est linéaire, et son intégrale générale est, en désignant la constante arbitraire par $-\frac{1}{a^m}\cot\varphi$,

$$\frac{1}{\rho^m} = \sin m\omega\left(-\frac{1}{a^m}\cot\varphi - \frac{m}{a^m}\int\frac{d\omega}{\sin^2 m\omega}\right),$$

ou bien

$$\frac{a^m}{\rho^m} = \sin m\omega(\cot m\omega - \cot\varphi) - \frac{\sin(\varphi - m\omega)}{\sin\varphi};$$

c'est l'équation (16).

Michaël Roberts a déduit cette équation de la définition par la relation

$$(\widehat{Ox, AM}) + (Ox, BM) + \ldots = \varphi;$$

le calcul de l'auteur (*Journal de Liouville*, t. X, p. 251) repose sur la formule

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{k\sin x}{1 - k\cos x} = \frac{k}{1}\sin x + \frac{k^2}{2}\sin 2x + \ldots.$$

Cette formule, où l'on suppose $|k| \leqq 1$, $|\operatorname{arc}| \leqq \frac{\pi}{2}$, est une des deux formules que l'on obtient en partant du développement

$$\operatorname{Log}(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \ldots, \qquad |z| \leqq 1,$$

qui donne la détermination de $\operatorname{Log}(1 + z)$, dont l'argument est compris entre $-\pi$ et $\pi$, et en faisant

$$z = -k(\cos x - i\sin x), \qquad k \leqq 1;$$

on a ainsi

$$\begin{aligned}&\operatorname{Log}[(1 - k\cos x) + i\sin x]\\&= -\left[\frac{k}{1}(\cos x - i\sin x) + \frac{k^2}{2}(\cos 2x - i\sin 2x) + \ldots,\right.\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{k}{1}\cos x + \frac{k^2}{2}\cos 2x + \ldots = -\operatorname{Log}\sqrt{1 - 2k\cos x + k^2},$$

$$\frac{k}{1}\sin x + \frac{k^2}{2}\sin 2x + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{k\sin x}{1 - k\cos x},$$

l'arc étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, attendu que son cosinus est positif. Ces formules sont dues à Euler ou à D. Bernoulli; la démonstration indiquée par Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, p. 410), ne diffère que par la forme de la précédente.

6. *Vérification géométrique du théorème de Lamé.* — Michaël Roberts vérifie comme il suit le théorème de Lamé. Si MU et MV sont les tangentes en M aux courbes définies par les deux équations

$$\prod \rho_1^\alpha = \text{const.}, \qquad \sum \alpha\omega_1 = \text{const.},$$

on a

$$\frac{d\rho_1}{ds} = \cos\widehat{M_1 MU}, \qquad \frac{\rho_1\, d\omega_1}{ds} = \sin\widehat{M_1 MV};$$

comme on a, selon la courbe envisagée,

$$\sum \alpha\frac{d\rho_1}{\rho_1} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \alpha\frac{\rho_1\, d\omega_1}{\rho_1} = 0,$$

on obtient

$$\sum \alpha\frac{\cos\widehat{M_1 MU}}{\rho_1} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum \alpha\frac{\sin\widehat{M_1 MV}}{\rho_1} = 0;$$

les deux courbes sont donc orthogonales.