

G. CASABONNE

Un théorème sur les équations algébriques entières

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 161-165

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__161_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3e]

UN THÉOREME SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ENTIÈRES;

PAR M. G. CASABONNE.

Une équation algébrique entière à m termes peut toujours être mise sous la forme

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + a_4 x^\gamma + \dots + a_m x^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x .

M. Landau a posé la question de savoir si, lorsque $\alpha = 1$, l'équation (1) admet toujours une racine dont le module est inférieur à un nombre fixe ne dépendant que du nombre des termes ⁽¹⁾.

Je me propose d'établir le théorème suivant, dont la proposition de M. Landau est un cas particulier :

Toute équation algébrique entière à m termes, de la forme

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + a_4 x^\gamma + \dots + a_m x^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x , admet toujours une racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2} .

⁽¹⁾ Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 198). — Voir aussi, pour cette question, P. MONTEL, *Sur un théorème d'Algèbre* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 1220).

Considérons d'abord l'équation à trois termes

$$(2) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta = 0.$$

L'équation

$$1 + x^\alpha = 0$$

admet α racines dont le module est égal à 1. Soit x' l'une d'elles. Faisons la transformation

$$x = x' + y.$$

L'équation (2) devient

$$1 + (x' + y)^\alpha + a_3 (x' + y)^\beta = 0$$

ou

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + b y + c y^2 + \dots + a_3 y^\beta = 0.$$

Or, par hypothèse, on a

$$1 + x'^\alpha = 0,$$

donc l'équation en y se réduit à

$$a_3 x'^\beta + b y + c y^2 + \dots + a_3 y^\beta = 0.$$

Le produit des β racines de cette équation est égal à $(-1)^\beta x'^\beta$, donc l'une d'elles au moins a un module inférieur ou égal à celui de x' . Soit y' cette racine. On a, par hypothèse,

$$|y'| \leq |x'|;$$

à cette racine y' de l'équation en y correspond, pour l'équation (2), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$|x| \leq |x'| + |y'| \leq |x'| + |x'|,$$

et, puisque $|x'| = 1$,

$$|x| \leq 2.$$

Supposons, maintenant, la proposition démontrée pour une équation algébrique entière à $m - 1$ termes et prouvons qu'elle est vraie pour une équation ayant un terme de plus.

Soient l'équation à m termes

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_{m-1} x^\lambda + a_m x^\mu = 0,$$

et x' la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-3} qu'admet, par hypothèse, l'équation à $m - 1$ termes

$$(3) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_{m-1} x^\lambda = 0.$$

Posons

$$x = x' + y,$$

et remplaçons x par $x' + y$ dans l'équation (1). On a

$$1 + (x' + y)^\alpha + a_3 (x' + y)^\beta + \dots + a_{m-1} (x' + y)^\lambda + a_m (x' + y)^\mu = 0$$

ou

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + \dots + a_{m-1} x'^\lambda + a_m x'^\mu + b y + c y^2 + \dots + a_m y^\mu = 0.$$

Par hypothèse,

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + \dots + a_{m-1} x'^\lambda = 0,$$

puisque x' est racine de l'équation (3); il reste donc

$$(4) \quad a_m x'^\mu + b y + c y^2 + \dots + a_m y^\mu = 0.$$

Cette équation a μ racines dont le produit est égal à $(-1)^\mu x'^\mu$. Donc l'une de ces racines, au moins, a un module inférieur ou égal à celui de x' . Soit y' cette racine. On aura

$$|y'| \leq |x'|.$$

A cette racine y' de l'équation (4) correspond, pour l'équation (1), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x'| + |y'| \\ &\leq |x'| + |x'|, \end{aligned}$$

et, comme $|x'| \leq 2^{m-3}$ par hypothèse,

$$|x| \leq 2^{m-2} \quad (1).$$

Voici une conséquence de la proposition précédente :

Soit l'équation algébrique entière à m termes

$$(5) \quad A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \dots + A_m X^\mu = 0.$$

Ramenons-la à la forme étudiée

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_m x^\mu = 0;$$

il suffit, pour cela, de diviser les deux membres par A_1 , puis de poser

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} X = x.$$

A toute racine x de l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), la racine

$$X = x \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et, par suite, à la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2} que possède toujours l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), une racine de module inférieur ou égal à

$$2^{m-2} \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(¹) Dans le cas où $\alpha = 1$ et $m = 3$ ou 4 , la proposition a déjà été établie par M. Landau (*loc. cit.*), qui trouve 2 dans le premier cas et $5\frac{2}{3}$ dans le second, comme limite supérieure du module de la racine de plus petit module.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute équation algébrique entière à m termes

$$A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \dots + A_m X^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de X, admet toujours une racine de module inférieur ou égal à

$$2^{m-2} \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$