NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur les polygones harmoniques d'un nombre pair de côtés et sur certains cercles du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 94-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__94_0>

[K[1]9dα]

SUR LES POLYGONES HARMONIQUES D'UN NOMBRE PAIR DE COTÉS ET SUR CERTAINS CERCLES DU TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

1. Si l'on transforme par inversion, par rapport à un point quelconque du plan, le module étant quelconque, les sommets d'un polygone régulier, on obtient les sommets d'un polygone inscrit dans un cercle. Ces *polygones harmoniques* jouissent de propriétés très curieuses déjà connues ([1]); nous en ajouterons quelques autres.

THÉORÈME. — *Dans un polygone harmonique*

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2n},$$

([1]) Voici une bibliographie peut-être incomplète des polygones harmoniques.

Quadrilatère harmonique (TUCKER, *Société mathématique de Londres*, 1885. — J. NEUBERG, *Mathesis*, 1885).

Note sur l'hexagone harmonique du triangle (J. CASEY, *Académie Royale d'Irlande*, 1886).

Mémoire sur les polygones harmoniques (J. CASEY, *A sequel to the first six books of the elements of Euclid*, 4e édition. — J. NEUBERG et TARRY, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Nancy, 1886. — T.-C. SIMMONS, *Proceedings of the London Mathematical Society*. — J. CASEY, *Mathesis*, 1890, p. 96).

Sur certains quadrilatères inscriptibles (Ch. MICHEL, *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1908, p. 259).

les diagonales $\alpha_1\alpha_{n+1}$, $\alpha_2\alpha_{n+2}$, ..., $\alpha_{n-1}\alpha_{2n-1}$ *concourent au point de Lemoine du polygone.*

Soit un polygone régulier $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Transformons la figure par inversion, le pôle n'étant pas situé sur la circonference circonscrite au polygone, le module etant quelconque. Le cercle circonscrit se transforme en un cercle Γ et ses diamètres A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, ..., $A_{n-1}A_{2n-1}$ en des cercles ayant deux à deux même axe radical. D'ailleurs les axes radicaux de ces cercles, associes respectivement avec le cercle Γ, sont concourants. Donc si l'on désigne par α_1, α_2, ..., α_{2n} les sommets du polygone harmonique donné par cette inversion, les diagonales $\alpha_1\alpha_{n+1}$, $\alpha_2\alpha_{n+2}$, ..., $\alpha_{n-1}\alpha_{2n-1}$ concourent en un même point K. Du reste, comme les points A_1, A_2, A_3, A_{n+2} forment un système harmonique, il en est de même de leurs inverses α_1, α_2, α_3, α_{n+2}. Puisque K est situé sur $\alpha_2\alpha_{n+2}$, il est tel que ses distances aux côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$ du polygone harmonique sont proportionnelles à ces côtés, c'est-à-dire le point de Lemoine du polygone.

Théoreme. — *Dans un polygone harmonique de $2n$ côtés, le produit des côtés de rang pair égale celui des côtés de rang impair.*

Dans l'inversion précédente, μ étant la puissance et S le pôle, a le côté du polygone régulier,

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{a}{SA_1.SA_2}\mu, \qquad \alpha_2\alpha_3 = \frac{a}{SA_2.SA_3}\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = \frac{a}{SA_{2n-1}.SA_{2n}}, \qquad \alpha_{2n}\alpha_1 = \frac{a}{SA_{2n}.SA_1}\mu;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\alpha_1\alpha_2.\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}{\alpha_2\alpha_3.\alpha_4\alpha_5\ldots\alpha_{2n}\alpha_1} = 1.$$

Théorème. — *Dans un polygone harmonique*

$A_1 A_2 \ldots A_{2n}$,

les cordes $A_2 A_{2n}$, $A_3 A_{2n-1}$, ... *concourent au pôle de* $A_1 A_{n+1}$ *par rapport au cercle circonscrit.*

La diagonale $A_1 A_{n+1}$ passant au point K de Lemoine du polygone, A_1, A_{n+1} sont conjugués harmoniques par rapport à A_2, A_{2n}. Donc $A_2 A_{2n}$ passe au pôle P de $A_1 A_{n+1}$. Il en est de même pour $A_3 A_{2n-1}$, ...

Les n diagonales du polygone, telles que $A_1 A_{n+1}$, ont donc leurs pôles sur la polaire Δ du point K de Lemoine par rapport au cercle circonscrit O.

Le cercle de centre P et de rayon PA_1 est un cercle d'Apollonius des triangles $A_1 A_2 A_{2n}$, ... Il existe ainsi n cercles, orthogonaux au cercle O et ayant pour centres les pôles des n diagonales $A_1 A_{n+1}$ du polygone harmonique. Ces cercles ont par suite même axe radical. Ils se coupent en deux points M et M' de la droite OK qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du polygone. Ces points M et M', obtenus différemment par J. Casey et appelés par lui *centres d'inversion* du polygone, apparaissent ici comme les *centres isodynamiques* dans le triangle. En les joignant par exemple aux sommets A_1, A_2, ..., A_{2n}, les droites obtenues rencontrent le cercle circonscrit en $2n$ points, sommets d'un polygone régulier de $2n$ côtés.

Leur construction est simple, puisqu'il suffit de tracer une seule circonférence P qui détermine M et M' sur OK.

Théorème. — *Quand un polygone* $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$, *inscrit à une conique, est tel que les cordes* $A_2 A_{2n}$, ..., $A_n A_{n+2}$ *concourent au pôle de* $A_1 A_{n+1}$, *par rapport à la conique, que les cordes* $A_1 A_3$, ..., $A_{n+1} A_{n+3}$

concourent au pôle de $A_2A_{n+2}, \ldots,$ *le rapport des produits des côtés de rang pair et des côtés de rang impair égale le rapport des produits des diamètres (réels ou imaginaires) qui leur sont parallèles.*

Quand un triangle ABC est inscrit à une conique, la tangente en B à la courbe rencontre AC en un point P tel que

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \times \frac{PA}{PC},$$

d_1, d_2 désignant les longueurs des diamètres (réels ou imaginaires) parallèles à AB et BC.

Considérant le quadrilatère $A_1A_2A_{n+1}A_{2n}$, inscrit à la conique, et désignant par d_1, δ_1, δ_2, d_{2n} les diamètres parallèles respectivement à A_1A_2, A_2A_{n+1}, $A_{n+1}A_{2n}$ et $A_{2n}A_1$, on obtient

$$\frac{A_2A_{n+1} \times A_{2n}A_1}{A_1A_2 \times A_{n+1}A_{2n}} = \frac{d_{2n}.\delta_2}{d_1.\delta_1}.$$

Des égalités analogues correspondent aux quadrilatères déterminés d'abord par A_1A_{n+1} et les cordes qui concourent à son pôle, puis par $A_2A_{n+2}, \ldots$ et les cordes qui passent par leurs pôles respectifs.

Multipliant membre à membre ces égalités, les côtés tels que A_2A_{n+1}, $A_{n+1}A_{2n}$, et les diamètres tels que δ_1, δ_2 s'éliminent d'eux-mêmes, et

$$\frac{A_2A_3.A_4A_5\ldots\ldots A_{2n}A_1}{A_1A_2.A_3A_4\ldots\ldots A_{2n-1}A_{2n}} = \frac{d_2.d_4\ldots\ldots d_{2n}}{d_1.d_3\ldots\ldots d_{2n-1}}.$$

Si la conique est un cercle,

$$d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d_{2n};$$

on retrouve alors la formule particulière (1).

2. Reprenons un polygone régulier $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$. **On peut** tracer une infinité de circonférences tangentes deux à deux et à la circonférence O circonscrite au polygone aux sommets A_1, A_2, ..., A_{2n}. Il existe deux séries de ces circonférences, suivant qu'elles sont intérieures ou extérieures à la circonférence O.

Transformons la figure par inversion, le pôle n'étant pas situé sur la circonférence O. Aux $2n$ circonférences du polygone régulier correspondent $2n$ circonférences tangentes deux à deux et touchant le cercle circonscrit au polygone harmonique, aux sommets de ce polygone.

Un polygone harmonique d'un nombre pair de côtés étant donné, on peut donc tracer $2n$ circonférences tangentes deux à deux et touchant le cercle circonscrit aux sommets. Commençant par une circonférence quelconque, la couronne des circonférences se ferme d'elle-même.

En particulier, *le quadrilatère harmonique est le seul quadrilatère inscriptible aux sommets duquel on puisse tracer des circonférences se touchant deux à deux et tangentes à la circonférence circonscrite.*

Remarque. — Dans un polygone quelconque

$$A_1 A_2 \ldots A_{2n+1}$$

d'un nombre impair de côtés, inscrit dans un cercle O, il est toujours possible de construire deux couronnes de cercles tangents deux à deux et au cercle circonscrit aux sommets du polygone ([1]). Les centres ω_1, ω_2, ..., ω_{2n+1} des cercles, situés sur OA_1, OA_2, ..., OA_{2n+1}, déterminent un polygone $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{2n+1}$ dont les côtés touchent les circonférences orthogonales au

---

([1]) Ed. Lucas, *Mathesis*, 1889, p. 180.

cercle O ayant pour centres les pôles respectifs de $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_{2n} A_{2n+1}$.

Le centre ω_1, par exemple, et par suite tous les autres, est obtenu en construisant les points doubles de deux divisions homographiques portées par OA_1.

3. Cette remarque suggère l'étude des cercles tangents deux à deux et au cercle circonscrit O à un triangle à ses sommets A, B, C.

Voici succinctement quelques propriétés de cette figure :

1° Les rayons des trois cercles ω_a, ω_b, ω_c, intérieurs au cercle O de rayon R, sont :

$$\rho_a = \frac{Rbc}{bc + 2aR}, \quad \rho_b = \frac{Rac}{ac + 2bR}, \quad \rho_c = \frac{Rab}{ab + 2cR}.$$

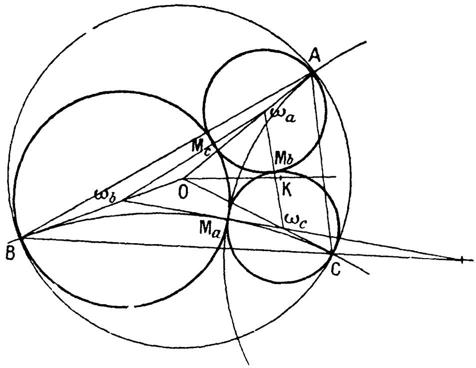
Les cercles ω'_a, ω'_b, ω'_c tangents extérieurement au cercle O ont pour rayons

$$\rho'_a = \frac{Rbc}{bc - 2bR}, \quad \rho'_b = \frac{Rac}{ac - 2bR}, \quad \rho'_c = \frac{Rab}{ab - 2cR}.$$

2° Les contacts M_a, M_b, M_c, des cercles ω_a, ω_b, ω_c deux à deux, sont les intersections des cercles d'Apollonius et des cercles ayant pour centres les pôles de A, B, C et orthogonaux au cercle O.

3° Les cercles d'Apollonius touchent donc ω_a, ω_b, ω_c en M_a, M_b, M_c. Le centre radical des cercles ω_a, ω_b, ω_c, pris deux à deux, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit au triangle $\omega_a \omega_b \omega_c$, a même puissance par rapport aux cercles d'Apollonius ; il est donc sur leur axe radical OK, K étant le point de Lemoine du triangle ABC.

4° Il existe un cercle Ω, autre que O, qui touche les cercles ω_a, ω_b, ω_c. Son centre, situé sur la perpendiculaire menée du centre radical des cercles ω_a, ω_b, ω_c, sur leur axe de similitude direct, est par conséquent un point de OK.



5° Le cercle Ω touche ω_a, ω_b, ω_c, à leurs intersections avec les cercles d'Apollonius correspondants, parce que ces cercles coupent orthogonalement ω_a, ω_b, ω_c.