NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 76-80
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__76_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1886.

(1900, p. 573; 1917, p. 399.)

Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque ABCD *et un rectangle* EFGH, *dont les diagonales* EG *et* FH *sont perpendiculaires aux diagonales* AC *et* BD *du quadrilatère* ABCD, *les quatre côtés des deux quadrilatères se coupent en seize points qui sont, quatre par quatre, sur des lignes droites* I, J, K, L. *La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.* L. Klug.

Solution

Par M. R. B.

Donnons à l'énoncé une forme projective. Nous considérerons deux quadrilatères $ABA'B'$, $\alpha\beta\alpha'\beta'$ inscrits à une même conique C, et tels que les diagonales AA' et $\beta\beta'$ soient conjuguées par rapport à C, ainsi que BB' et $\alpha\alpha'$. Il faut démontrer que ces deux quadrilatères ont les propriétés indiquées.

Rappelons que : *si* P *et* Q *sont les points doubles de deux divisions homographiques sur une conique* C, *et si* (M, M'), (N, N') *sont deux couples de points correspondants des deux divisions*, MN' *et* NM' *se coupent sur* PQ. On reconnaît en effet immédiatement que, si MN' et NM' se coupent sur PQ. le point N' correspond au point N dans l'homographie définie par les couples (P, P), (Q, Q), (M, M').

Cela posé, il résulte de l'hypothèse que les divisions $(A\beta A'\beta')$ et $(\alpha B\alpha' B')$ sont toutes deux harmoniques, donc en correspondance homographique. Il existe donc, en vertu du lemme rappelé, une droite I contenant les points

$$(AB, \alpha\beta), (BA', \beta\alpha'), (A'B', \alpha'\beta'), (B'A, \beta'\alpha).$$

On peut, sans changer l'ordre des points de la première division, permuter dans la seconde α et α', B et B', soit séparément, soit simultanément. Cette division ne cessera pas d'être harmonique, de sorte que le raisonnement s'applique toujours. On établit ainsi l'existence des trois autres droites J, K L, contenant :

J, les points

$$(AB, \alpha'\beta), (BA', \beta\alpha), (A'B', \alpha\beta'), (B'A, \beta'\alpha');$$

K, les points

$$(AB', \alpha\beta), (B'A', \beta\alpha'), (A'B, \alpha'\beta'), (BA, \beta'\alpha);$$

L, les points

$$(AB', \alpha'\beta), (B'A', \beta\alpha), (A'B, \alpha\beta'), (BA, \beta'\alpha').$$

La première partie de l'énoncé est ainsi établie. Pour établir la seconde, observons, qu'outre les points déjà considérés :

I contient	$(A\alpha', A'\alpha)$	et	$(B\beta', B'\beta)$;
J contient	$(A\alpha, A'\alpha')$	et	$(B\beta', B'\beta)$;
K contient	$(A\alpha', A'\alpha)$	et	$(B'\beta', B\beta)$;
L contient	$(A\alpha, A\alpha')$	et	$(B'\beta', B\beta)$.

Par conséquent, I et J par exemple se coupent en $(B\beta', B'\beta)$ et K et L en $(B'\beta', B\beta)$. Or ces deux points sont conjugués par rapport à C, Donc, etc.

2038.

(1906, p. 14; 1918, p. 468)

On mène les hauteurs AD, BE, CF *du triangle* ABC. *Soient* D_1 E_1 F_1 *l'axe d'homologie des triangles* ABC, DEF. *Par* E_1, F_1, D_1 *on mène les parallèles à* AB, BC, CD *qui coupent* BC, BA, AB *aux points* I, H, K, *en ligne droite, et les parallèles à* BC, CA, AB *qui coupent* AB, BC, CA *aux points* K_1, I_1, H_1, *aussi en ligne droite. Soient* Q *et* Q_1 *les coniques circonscrites à* ABC *et tangentes, la première à* AI, BH, CK *et la seconde à* AI_1, BH_1, CK_1.

I. *Si par un point* O *de* Q *on mène des perpendiculaires à* BC, CA, AB, *elles coupent* CA, AB, BC *en* μ, ν, λ *et l'on* *a la droite* $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$. *Ces mêmes perpendiculaires menées par un point* O_1 *de* Q_1 *coupent* AB, BC, CA *aux points* ν_1, λ_1, μ_1 *et l'on a la droite* $\Delta(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

II. *Les coniques* Q *et* Q_1 *et le cercle* ABC *ont un quatrième point commun* ω *auquel correspondent deux droites* Δ *et* Δ_1 *et la droite de Simson* Δ_2.

III. *Si* ABC *est un triangle équilatéral, les coniques* Q, Q_1 *se superposent au cercle* ABC *et à tout point* O *de ce cercle correspondent trois droites* Δ, Δ_1, Δ_2. P. Sondat.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

La proposition à démontrer est un cas particulier de la suivante, qui n'est d'ailleurs que le théorème de Simson, énoncé sous sa forme la plus générale.

Soient ABC *un triangle donné;* D_A, D_B, D_C *trois directions données, le lieu des points* M *tels que les parallèles menées par* M *à* D_A, D_B, D_C *rencontrent* BC, CA, AB *respectivement en trois points en ligne droite est une conique* Q_1 *circonscrite à* ABC, *et coupant la droite de l'infini en ses points d'intersection avec les rayons doubles de l'homographie déterminée par les trois courbes de rayons* BC *et* D_A, CA *et* D_B, AB *et* D_C.

La tangente à Q_1 *en* A *par exemple est le rayon conjugué de la direction* BC *dans l'involution ayant pour couples de rayons* AB *et* AC *et les directions asymptotiques de* Q_1.

En faisant correspondre aux côtés BC, CA, AB, *les directions* D_B, D_C, D_A, *puis* D_C, D_A, D_B, *on obtient de même deux coniques* Q_2 *et* Q_3. *Les trois coniques* Q_1, Q_2, Q_3 *font partie d'un même faisceau ponctuel.*

Si en effet on prend pour axes CA et CB, si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ est l'équation de AB, si m_1, m_2, m_3 désignent les coefficients angulaires de D_A, D_B, D_C, l'équation de Q_1 est

$$\frac{1}{a}x(m_3 - m_2)(m_1 x - y) - \frac{1}{b}y(m_3 - m_1)(y - m_2 x) \\ - y[y(m_1 - m_3) + x m_1(m_3 - m_2)] = 0,$$

sur laquelle les propriétés de l'énoncé ci-dessus se vérifient immédiatement.

Les équations de Q_2 et Q_3 s'obtiennent par permutation circulaire de m_1, m_2, m_3 et l'on a évidemment $Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0$. Les directions asymptotiques de Q_1, Q_2 et Q_3 sont d'ailleurs par leur détermination même en involution ; ces trois coniques ayant déjà trois points communs, A, B, C en ont donc un quatrième.

La troisième partie découle évidemment de la propriété énoncée ci-dessus et l'on peut ajouter à l'énoncé que *dans le cas du triangle équilatéral les trois droites* Δ, Δ_1, Δ_2 *forment un triangle équilatéral.*

2039.

(1906, p. 144 ; 1917, p. 468.)

Démontrer la relation

$$(1)\quad \sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines supposées distinctes de l'équation algébrique $f(x) = 0$; *la deuxième, à toutes les racines supposées distinctes de* $f'(x) = 0$: *la troisième, à toutes les racines supposées distinctes de* $f''(x) = 0$.

Étendre la relation (1) *en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc. du polynome* $f(x)$.

NICOLAS KRYLOFF.

SOLUTION

Par M. LOUIS POLI.

La question est assez simple, mais une erreur d'impression a dû retarder l'envoi d'une solution. Il faut lire, pour la seconde somme, $\sum \frac{f'''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)}$.

J'ajoute qu'on doit supposer les racines de $f(x) = 0$ distinctes non seulement de celles de $f'(x) = 0$ [ce qui est évident, sans cela $f(x) = 0$ aurait une racine double] ; mais même distinctes des racines de $f''(x)$. Sans cela, pour cette racine, la première et la dernière somme deviennent infinies.

On sait que la somme $\sum \frac{P(x)}{Q'(x)}$ étendue à toutes les racines supposées distinctes de $q(x) = 0$ est égale à 0 si le degré de Q surpasse au moins de 2 celui de P.

Faisons dans cette identité $Q = \varphi\chi\psi\theta$, ...

Les racines de Q seront celles de φ, celles de χ, celles de ψ, etc. et Q' pour une racine α de φ par exemple se réduira à $Q'_{(\alpha)} = \varphi'(\alpha)\chi(\alpha)\psi(\alpha)\theta(\alpha)$.

L'identité en question s'écrit donc

$$\sum \frac{P(\alpha)}{\varphi'\chi\psi\theta} + \sum \frac{P(\beta)}{\varphi\chi'\psi\theta} + \sum \frac{P(\gamma)}{\varphi\chi\psi'\theta} + \sum \frac{P(\delta)}{\varphi\chi\psi\theta'} + \ldots = 0$$

La première somme doit s'étendre à toutes les racines de φ, la seconde à celles de χ, ...

En particulier, si l'on fait $\varphi = f(x)$, $\chi = f'$, $\psi = f''$, ..., et $p = f^{(n)}$, il viendra

$$\sum \frac{f^{(n)}_{(x)}}{f'^2 f'' f''' \ldots f^{\mu}} + \sum \frac{f^{(n)}_{(x)}}{f f''^2 f''' \ldots f^{\mu}} + \ldots$$
$$+ \sum \frac{f^{(n)}_{(x)}}{f f' \ldots f^{(\mu-1)} f^{(\mu+1)}} = 0.$$

La première somme s'étend aux racines de $f = 0$, la seconde aux racines de f', ...

Le cas du texte correspond à $n = 3$, $\mu = 2$.