Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 60-73
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__60_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *En désignant par* z *une fonction inconnue, et par* A, B, C *trois fonctions connues* *des deux variables indépendantes x et y, on considère le système des équations simultanées*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \mathrm{B}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{C}.$$

Former les conditions d'intégrabilité du système; combien y en a-t-il de distinctes?

2° *Déterminer une fonction λ de x et de y de manière que le système*

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x^2 - 1)\lambda, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} = 2xy\lambda, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y^2 - 1)\lambda$$

soit intégrable, et former dans ce cas son intégrale générale.

Solution. — 1° Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial x^2};$$

la troisième est une simple conséquence des deux premières.

2° Les conditions qui déterminent λ sont

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -2x\lambda, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -2y\lambda;$$

on en déduit

$$\lambda e^{x^2+y^2} = \text{const.} = \mathrm{C}.$$

Le système (2) admet alors pour intégrale générale

$$z = \frac{\mathrm{C}}{2} e^{-x^2+y^2} + \alpha x \beta y + \gamma,$$

α, β, γ désignant trois constantes arbitraires.

II. *Une surface étant définie en coordonnées rectangulaires à l'aide des formules*

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

où u, v désignent deux paramètres arbitraires, quelle est la condition :

1° *Pour que les courbes $u =$ const. forment sur elle un réseau orthogonal?*

2° Pour qu'elles y forment un réseau conjugué?

Lorsque ces deux conditions se trouvent à la fois satisfaites, quelle propriété peut-on en déduire relativement aux deux familles de courbes?

Application à la surface définie par les formules

$$(4) \quad x = \frac{2av^2}{1+u^2+v^2}, \qquad y = ux, \qquad z = v(x-2a),$$

où a désigne une constante donnée.

Solution. — 1° Il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient u et v,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

2° Il faut et il suffit que l'on ait de même

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque les deux conditions sont satisfaites à la fois, les courbes dont il s'agit constituent les deux séries de lignes de courbure de la surface (3).

Pour la surface particulière (4), qui remplit les deux conditions énoncées, et dont l'équation cartésienne est

$$x(x^2+y^2+z^2) - 2a(x^2+y^2) = 0,$$

les lignes de courbure sont les cercles déterminés par les deux séries de plans

$$y = ux, \qquad z = v(x-2a),$$

respectivement perpendiculaires sur XOY et sur XOZ. En vertu du théorème de Joachimsthal, la normale à la surface (4) tout le long d'un de ces cercles engendre un cône de révolution; le lieu des sommets de ces cônes se compose de deux paraboles respectivement situés dans les plans XOY, XOZ, et ayant pour équations respectives

$$y^2 + 4a(x - a) = 0, \qquad z^2 - 4ax = 0;$$

en désignant par A le point d'abscisse a situé sur l'axe OX, la première parabole, dont l'ouverture est tournée vers les x négatifs, a pour foyer le point O et pour sommet le point A; la seconde, dont l'ouverture est tournée vers les x positifs, a, inversement, pour foyer le point A et pour sommet le point O.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer une fonction u des trois variables indépendantes x, y, z par la double condition : 1° de vérifier l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z} + 2u = 0;$$

2° de se réduire à e^{y-z} pour $x = 0$.

SOLUTION. — $u = e^{\pm x + y - z}$.

(Juillet 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z},$$

et faire voir que, si x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, l'une quelconque des surfaces intégrales est engendrée par un cercle.

Déterminer, parmi ces surfaces, celle qui contient l'hyperbole

$$(2) \qquad x = a, \qquad z^2 - y^2 = a^2,$$

où a désigne une longueur donnée.

SOLUTION. — Le système différentiel associé s'écrit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z\,dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il admet les intégrales premières

$$\frac{y}{x} = C, \qquad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C',$$

et l'intégrale générale est

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Toute surface intégrale est engendrable par un cercle tangent en O à l'axe OZ.

La surface (3) étant assujettie à contenir l'hyperbole (2), on doit avoir identiquement

$$\frac{2(a^2 + y^2)}{a} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

ainsi on a, quel que soit t,

$$f(t) = 2a(1 + t^2).$$

On obtient ainsi la surface particulière

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = 2a\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

ou

$$x(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0.$$

II. *Les axes* OX, OY, OZ *étant supposés rectangulaires, former l'équation générale des surfaces engendrées par une droite qui rencontre constamment l'axe* OZ; *en déduire les formules qui définissent une pareille surface en coordonnées semi-polaires. Chercher, parmi ces surfaces, celles qui jouissent de la propriété que, en désignant par* M *un point quelconque de la surface et par* M′ *sa projection orthogonale sur le plan* XOY, *les tangentes aux deux lignes de courbure qui passent en* M *se projettent sur le plan* XOY *suivant deux droites également inclinées sur* OM′.

Solution. — L'équation générale spécifiée par l'énoncé est

$$z = x F\left(\frac{y}{x}\right) + H\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'on déduit, par le passage aux coordonnées cylindriques,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = rf(\theta) + g(\theta).$$

Pour que cette surface remplisse la condition requise, il faut et il suffit, si l'on se reporte à la formule

$$\operatorname{tang} V = r\frac{d\theta}{dr}$$

qui détermine la tangente à une courbe plane en coordonnées polaires, que les deux valeurs de $\frac{dr}{d\theta}$ tirées de l'équation différentielle des lignes de courbure aient une somme nulle, ce qui donne, après suppression du facteur commun r,

$$r(\varphi + \varphi'') + \psi'' = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée quels que soient r et θ, on devra avoir séparément $\varphi + \varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$. Les surfaces cherchées sont dès lors

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$z = r(A\cos\theta + B\sin\theta) + C\theta + D,$$

où A, B, C, D désignent quatre constantes arbitraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Former l'intégrale générale du système des équations simultanées*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2 + yz)u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (xz + y)u, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= (xy + z)u, \end{aligned} \right.$$

où u désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes x, y, z.

Déterminer l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale

$$(2) \qquad u = 1 \quad \textit{pour} \quad x = y = z = 0,$$

et, supposant cette intégrale développée suivant les puis-

sances et produits de puissances de x, y, z, indiquer comment on peut pour construire le développement dont il s'agit, calculer le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ (terme général); effectuer ce calcul pour les divers termes dont le degré total $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à 1, 2 ou 3.

Comment peut-on reconnaître, préalablement à toute intégration, que le système proposé est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'il admet, de quelque façon que l'on choisisse, les valeurs numériques x_0, y_0, z_0, une intégrale répondant à la condition initiale

$$u = u_0 \quad \textit{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0 ?$$

Effectuer cette vérification.

SOLUTION. — L'intégrale générale du système (1) est

$$u = C e^{\frac{x^3}{3} + xyz + \frac{y^2+z^2}{2}},$$

où C désigne une constante arbitraire; l'hypothèse $C = 1$ fournit l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale (2).

En désignant par $F(x, y, z)$ cette intégrale particulière, le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ dans le développement spécifié par l'énoncé s'obtient en divisant par le produit

$$1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma$$

la valeur numérique que prend, pour $x = y = z = 0$, la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} F(x, y, z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$. Le calcul numérique est immédiat.

Quant au dernier point, il résulte simplement du cours.

(Novembre 1919.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégrer, à l'aide des séries, l'équation*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + a^2 x^2 y = 0.$$

Intégrale générale.

Solution. — Si l'on pose $y = zx$, on arrive à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a^2 z = 0.$$

Ainsi l'intégrale générale est

$$y = x(\mathrm{A} \cos ax + \mathrm{B} \sin ax).$$

On retrouve aisément le même résultat à l'aide des développements en séries fournis par le théorème de Fuchs.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation*

$$(1 + 2x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2(1 + 2x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 12(1 + 2x) \frac{dy}{dx} - 64 y = \frac{6x}{(1 + 2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

2° *Intégrer l'équation*

$$x^{n+1} \frac{dy}{dx} + 5 x^{2n} y^2 + (n - 26) x^n y + 5 = 0,$$

soit à l'aide de deux quadratures, soit à l'aide d'une quadrature unique (on pourra d'abord chercher une solution particulière de la forme $y = \alpha x^p$).

Solution. — 1° Si l'on pose $1 + 2x = e^t$, l'équation proposée devient

$$8\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - 8y\right) = 3\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right).$$

L'équation sans second membre a pour équation caractéristique

$$(r - 2)(r^2 + 4) = 0$$

et pour intégrale générale

$$y = \mathrm{A} e^{2t} + \mathrm{B} \sin 2t + \mathrm{C} \cos 2t.$$

L'équation complète admet comme intégrale particulière

$$y = -\frac{1}{17} e^{\frac{t}{2}} + \frac{3}{85} e^{-\frac{t}{2}}.$$

2° Prenons pour fonction inconnue $z = x^n y$; il vient

$$z'x + (z - 5)(5z - 1) = 0.$$

Comme $z = 5$ est une solution évidente de cette équation de Riccati, on posera $z = 5 + \frac{1}{u}$, et l'on aura à intégrer l'équation linéaire

$$u'x - 24u + 5 = 0;$$

on obtient

$$u = Cx^{24} - \frac{5}{24}.$$

L'intégrale générale cherchée est définie par

$$(x^n y - 5)\left(Cx^{24} - \frac{5}{24}\right) = 1.$$

(Juin 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère la surface définie par les expressions*

$$x = u + (v - 1)\sin u,$$
$$y = 1 + (v - 1)\cos u,$$
$$z = a\left(\frac{u^2}{2} + v\right),$$

où a est une constante et où u et v sont deux paramètres variables.

1° *Trouver toutes les courbes de l'espace dont les tangentes sont parallèles aux droites de la surface. (On se contentera d'exprimer les coordonnées courantes d'un point de la courbe sous forme d'intégrales renfermant une fonction arbitraire.) Déterminer en particulier celles dont le rayon de courbure est constant.*

2° *Trouver les courbes trajectoires orthogonales des droites de la surface.*

3° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et montrer que son intégration peut se ramener à une quadrature.*

II. *Deux courbes* C, Γ *se correspondent point par point de manière que les tangentes aux points correspon-*

dants M, μ *soient parallèles. Soient* C_1, Γ_1 *deux courbes rencontrant respectivement toutes les tangentes à* C, Γ; *soient* M_1, μ_1 *les points où ces courbes rencontrent respectivement deux tangentes correspondantes quelconques* MT, $\mu\tau$ *de* C, Γ.

Montrer qu'étant donnée C_1, *on peut choisir* Γ_1 *de manière que sa tangente en tout point* μ_1 *soit parallèle à la tangente à* C_1 *au point correspondant* M_1; *les courbes* Γ_1 *qui jouissent de cette propriété forment une famille dépendant d'un paramètre arbitraire.*

On peut définir C_1 *par la donnée, en fonction de l'abscisse curviligne s de point* M, *de la longueur l du vecteur* MM_1 *porté sur la tangente* MT *à la courbe* C; *soit* s_1 *l'abscisse curviligne de* M_1 *sur* C_1. *Soient* σ, λ, σ_1 *les quantités analogues relatives à* $\Gamma\Gamma_1$.

Montrer que l'on a

$$\frac{ds+dl}{ds_1} = \frac{d\sigma + d\lambda}{d\sigma_1} \qquad et \qquad \frac{ds_1}{l} = \frac{d\sigma_1}{\lambda}.$$

Examiner le cas particulier où C_1 *coupe orthogonalement toutes les tangentes* MT *et où* Γ *se réduit à un point.*

Solution. — I. 1° Les courbes demandées sont définies par les relations

$$\frac{dx}{\sin u} = \frac{dy}{\cos v} = \frac{dz}{a} = \frac{ds}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$x = \int \frac{\sin u \, ds}{\sqrt{1+a_2}}, \qquad y = \int \frac{\cos u \, ds}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$z = \frac{as}{\sqrt{1+a^2}} + \text{const.},$$

u est une fonction arbitraire de s.

En exprimant que le rayon de courbure est égal à R, on obtient

$$\frac{u'^2}{1+a^2} = \frac{1}{R^2} \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{\sqrt{1+a^2}}{R} s + \text{const.}$$

2° Les trajectoires orthogonales sont définies par la condition que le déplacement dx, dy, dz sur la surface soit perpendiculaire à la direction ($\sin u$, $\cos u$); il vient

$$\sin u\, du + dv + a\, dz = 0$$

ou

$$az + v - \cos u = \text{const.}$$

3° L'équation générale des asymptotiques est

$$D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2 = 0,$$

les déterminants de Gauss ayant pour valeurs respectives

$$D = av[\cos u - (v - 1)], \qquad D' = a[\sin u - u], \qquad D'' = 0.$$

La solution $du = 0$ correspond aux génératrices rectilignes. Les asymptotiques proprement dites sont définies par l'équation linéaire en $\frac{1}{v}$,

$$2(u - \sin u)\frac{d}{du}\left(\frac{1}{v}\right) - \frac{1 - \cos u}{v} + 1 = 0.$$

Comme l'équation sans dernier terme a pour intégrale

$$v^2(u - \sin u) = \text{const.},$$

l'intégration est ramenée à une quadrature.

II. Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) les coordonnées des points M, M_1, μ, μ_1; (α, β, γ) les cosinus directeurs des tangentes parallèles en M et M_1. On a

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad \ldots, \qquad \xi_1 = \xi + \lambda\alpha, \qquad \ldots.$$

Le parallélisme des tangentes à C_1 et à Γ_1 en M_1 et μ_1 se traduit par les relations

$$\frac{\alpha(ds + dl) + l\, d\alpha}{ds_1} = \frac{\alpha(d\sigma + d\lambda) + \lambda\, d\alpha}{d\sigma_1}, \qquad \ldots,$$

qui, multipliées respectivement par α, β, γ, puis par $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et ajoutées membres à membres, donnent les relations demandées

$$\frac{ds + dl}{ds_1} = \frac{d\sigma + d\lambda}{d\sigma_1}, \qquad \frac{l}{ds_1} = \frac{\lambda}{d\sigma_1}.$$

Soient

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s)$$

les équations de la courbe (C); $\sigma = F(s)$ une relation de correspondance; la courbe Γ aura pour équations

$$\xi = \int f'(s) F'(s)\, ds, \qquad \eta = \int g'(s) F'(s)\, ds,$$
$$\zeta = \int h'(s) F'(s)\, ds.$$

Soit donnée $l(s) = MM_1$; nous aurons, pour déterminer

$$\lambda(s) = \mu\mu_1,$$

la relation

$$\frac{ds + dl}{l} = \frac{d\sigma + d\lambda}{\lambda},$$

qui est une équation linéaire du premier ordre

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{1 + l'}{l}\lambda + F'(s) = 0.$$

L'expression générale de $\lambda(s)$ contiendra bien un paramètre arbitraire.

Le cas particulier proposé correspond à

$$dl + ds = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 + l' = 0,$$

et à

$$d\xi = d\eta = d\zeta = 0 \qquad \text{ou} \qquad F'(s) = 0;$$

alors λ est constant et la courbe Γ_1 est une indicatrice sphérique de C.

Épreuve pratique. — 1° *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$(x - 1)y'' + (4x - 5)y' + (4x - 6)y = xe^{-2x}.$$

2° *Trouver l'intégrale particulière qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour $x = 0$.*

Solution. — Posons $y = e^{-2x}z$; l'équation proposée devient

$$(x - 1)z'' - z' = x$$

ou

$$\frac{z'}{x-1} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2}.$$

L'intégrale générale est

$$2yl^{2x} = \alpha - 2(x-1) + (x-1)^2[\beta + L(1-x)].$$

L'intégrale particulière spécifiée est donnée par

$$4ye^{2x} + 3x^2 - 2x - 2(x-1)^2 L(1-x) = 0.$$

(Novembre 1919.)

Clermont-Ferrand.

Épreuve théorique. — *On considère la surface engendrée par la révolution d'une cycloïde autour de sa tangente en sommet.*

1° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface;*

2° *Prouver que, si l'on considère les deux surfaces engendrées par la révolution de deux cycloïdes de paramètres différents, on peut faire correspondre les points de l'une à ceux de l'autre, de telle manière que les méridiens de l'une correspondent aux méridiens de l'autre, les parallèles aux parallèles et que les arcs de deux courbes correspondantes quelconques soient toujours égaux.*

Solution. — Cette question a été posée à Paris en novembre 1891 exactement dans les mêmes termes; elle est résolue dans les *Compositions d'Analyse* d'Ed. Villié, tome III, page 84. Les asymptotiques se projettent sur le plan équatorial suivant les spirales

$$r = \frac{2a}{\operatorname{ch}^2 \dfrac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2}}}.$$

Les lois d'association des parallèles et des méridiens sont, en marquant de l'indice 1 les éléments de la seconde surface,

$$ar = a_1 r_1, \qquad \frac{\theta}{a} = \frac{\theta_1}{a_1}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx}\cos 2x = 2 + X'\sin 2x - 2\left(X' + \frac{1}{\sin 2x}\right)y + y^2 X'\sin 2x,$$

dans laquelle X' *désigne la dérivée d'une fonction donnée* X *de* x.

1° *Démontrer qu'elle admet deux solutions particulières dont le produit est égal à l'unité;*

2° *Déterminer son intégrale générale.*

SOLUTION. — Cette question a été posée à Toulouse en novembre 1891 exactement dans les mêmes termes; elle est résolue dans l'Ouvrage cité plus haut, tome III, page 29. En exprimant que $\frac{1}{y}$ vérifie la même équation et en éliminant $\frac{dy}{dx}$, on trouve une équation du second degré donnant les deux solutions particulières $y_1 = \operatorname{tang} x$, $y_2 = \cot x$.

L'intégrale générale est définie par

$$\frac{y - \cot x}{y - \operatorname{tang} x} = Ce^{2X}.$$

(Novembre 1919.)