NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur les contacts des sphères tangentes à quatre plans

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 55-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__55_1>

[$K^1$16b]

SUR LES CONTACTS DES SPHÈRES TANGENTES A QUATRE PLANS ;

PAR M. V. THÉBAULT.

1. Désignons par a, b, c les plans bissecteurs des dièdres suivant BC, CA, AB; par α, β, γ ceux des dièdres suivant DA, DB, DC, dans un tétraèdre ABCD. Affectons d'un accent les plans bissecteurs des dièdres extérieurs.

Il existe en général huit sphères tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre. Ces sphères forment deux systèmes suivant que le nombre des plans bissecteurs intérieurs passant par le centre est pair ou impair. On a, par exemple,

$$(\mathrm{I}) \qquad (a, \alpha)\,(b, \beta)\,(c, \gamma),$$
$$(\mathrm{I}') \qquad (a, \alpha)\,(b', \beta')\,(c', \gamma'),$$
$$(\mathrm{I}'') \qquad (a', \alpha')\,(b, \beta)\,(c', \gamma'),$$
$$(\mathrm{I}''') \qquad (a', \alpha')\,(b', \beta')\,(c, \gamma)$$

et

$$(I_1) \qquad (a', \alpha)\ (b, \beta')\ (c, \gamma'),$$
$$(I_2) \qquad (a, \alpha')\ (b', \beta)\ (c, \gamma'),$$
$$(I_3) \qquad (a, \alpha')\ (b, \beta')\ (c', \gamma),$$
$$(I_4) \qquad (a', \alpha)\ (b', \beta)\ (c', \gamma).$$

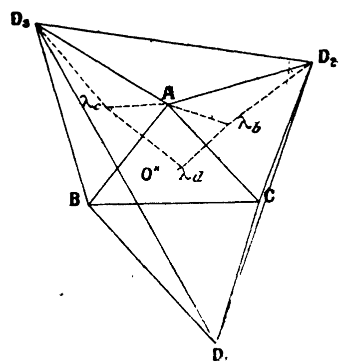
2. Ces deux systèmes sont nettement distincts :

1° La droite qui joint deux centres d'un même système rencontre deux arêtes opposées du tétraèdre; ainsi la droite (II') est (a, α);

2° La droite qui joint deux centres de systèmes différents passe par un sommet du tétraèdre ; ainsi la droite (II_1) est (α, β, γ).

Les sphères du premier système sont respectivement la sphère intérieure au tétraèdre et les sphères situées dans les combles. Celles du second système sont les sphères situées dans les trièdres tronqués.

3. Si, par une droite, on mène les deux plans tan-



gents à une sphère et si l'on joint aux points de contact λ et μ, deux points quelconques A et B de la droite, les angles $A\lambda B$ et $A\mu B$ sont égaux.

Si λ est le contact d'une sphère tangente aux plans des quatre faces d'un tétraèdre sur la face ABC, par exemple, et si a_1, b_1, c_1 sont les angles compris entre les droites joignant λ aux sommets A, B, C, on pourra désigner les angles analogues des trois autres faces respectivement par

$$(a_1, b_2, c_2), \quad (a_2, b_1, c_2), \quad (a_2, b_2, c_1)$$

et

$$2\pi = a_1 + b_1 + c_1 = a_1 + b_2 + c_2 = a_2 + b_1 + c_2 = a_2 + b_2 + c_1,$$

d'où

$$b_1 = b_2, \qquad c_1 = c_2, \qquad a_1 = a_2.$$

Une sphère touchant les plans des quatre faces d'un tétraèdre, si l'on joint le point de contact d'une face aux sommets de cette face, les trois angles compris entre les droites ainsi menées sont les mêmes dans les quatre faces.

4. Le plan de chaque face d'un tétraèdre ABCD contient en général huit contacts susceptibles d'une élégante détermination.

Rabattons sur le plan ABC, par exemple, les faces DBC, DCA, DAB, de manière que les triangles obtenus D_1BC, D_2CA, D_3AB soient extérieurs à ABC. Les contacts de la sphère (I) inscrite intérieurement au tétraèdre sur les faces DBC, DCA, DAB se rabattent respectivement suivant les symétriques λ_a, λ_b, λ_c, par rapport à BC, CA, AB, du contact λ_d de la face ABC. Donc λ_d est l'inverse triangulaire du centre du cercle circonscrit au triangle $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ par rapport à ABC. Mais, à cause de l'égalité des triangles $A\lambda_bD_2$ et $A\lambda_cD_3$, par exemple, $\lambda_b\lambda_cD_3D_2$ est un trapèze isoscèle, et $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ et $D_1D_2D_3$ sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre O de leurs cercles circonscrits.

Le contact λ_d, *d'une sphère* (I) *inscrite intérieurement au tétraèdre, sur la face* ABC, *est donc l'inverse triangulaire, par rapport à cette face, du centre du cercle circonscrit au triangle* $D_1D_2D_3$.

Si l'on rabat une face sur le plan ABC vers l'extérieur et les deux autres vers l'intérieur, l'inverse du centre du cercle circonscrit au triangle $D_1D_2D_3$ obtenu, par rapport à ABC, est le contact de l'une des sphères (I'), (I''), (I''') des combles. On a ainsi trois autres contacts.

Rabattant les trois faces vers l'intérieur, sur le plan ABC, on détermine le contact de la sphère (I_4) inscrite dans le trièdre tronqué de sommet D.

Enfin, les contacts des sphères (I_1), (I_2), (I_3) proviennent du rabattement sur ABC de deux faces adjacentes vers l'extérieur, une vers l'intérieur.

5. Dans un tétraèdre équifacial, deux faces rabattues sur un même plan, de part et d'autre de leur arête commune, forment un parallélogramme. Les propriétés suivantes apparaissent alors :

Dans un tétraèdre équifacial :

1° *La sphère inscrite* (I) *touche chacune des faces au centre de son cercle circonscrit ;* (I) *est donc concentrique à la sphère circonscrite et son rayon égale le quart de la hauteur du tétraèdre;*

2° *Les sphères exinscrites touchent la face correspondante en son orthocentre; ces sphères sont égales, leur rayon est la moitié de la hauteur du tétraèdre et leurs centres sont les points de la sphère* *circonscrite diamétralement opposés aux sommets;*

3° *Il n'existe pas, dans les combles constitués par les plans qui forment le tétraèdre, de sphères tangentes à ces plans.*

Le centre du cercle circonscrit au triangle $D_1D_2D_3$ correspondant, situé en effet sur le cercle circonscrit à ABC, a pour inverse, par rapport à cette face, un point à l'infini.