NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON POMEY

Note géométrique sur une généralisation du théorème de composition des vitesses et le théorème de Coriolis

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 496-501

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__496_1>

[R1d]

NOTE GÉOMÉTRIQUE SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE COMPOSITION DES VITESSES ET LE THÉORÈME DE CORIOLIS;

PAR M. LEON POMEY.

Soient T un trièdre fixe de sommet O, S un corps solide animé par rapport à T d'un mouvement donné, et M un mobile animé d'un mouvement donné par rapport à S (*mouvement relatif*). On veut déduire de ces deux mouvements connus le mouvement de M, qui en résulte par rapport à T (*mouvement absolu*). Pour y parvenir, nous nous appuierons sur ce *lemme*.

THÉORÈME DE COMPOSITION DES VITESSES GÉNÉRALISÉ. — *Étant donné un mobile* μ, *dont la position par rapport à* T *dépend uniquement de celle de* M *et qui est immobile si l'on suppose que* M *l'est, la* *vitesse* $v_a(\mu)$, *dite* absolue, *de* μ *par rapport à* T *à l'instant* t (*dans le mouvement de* μ *qui correspond au mouvement absolu de* M) *est la somme géométrique de deux autres vitesses :* 1° *celle* $\rho(\mu)$, *que* μ *aurait dans son mouvement correspondant au seul mouvement relatif de* M *par rapport à* S, *dans l'hypothèse où* S *est immobilisé à l'instant* t; 2° *celle* $\eta(\mu)$, *que* μ *aurait au contraire dans l'hypothèse du seul mouvement d'entraînement de* M, *quand on suppose* M *fixé invariablement à* S *à partir de l'instant* t.

Soient, en effet, P et P_1 les positions de M aux instants t et $t+dt$ dans la première hypothèse. Soient P' et P'_1 les positions à l'instant $t+dt$ des points P et P_1 quand on les considère comme fixés invariablement au corps S. Les déplacements élémentaires de M dans son mouvement absolu, dans son seul mouvement relatif (1re hypothèse) et dans son seul mouvement d'entraînement (2e hypothèse) sont donc respectivement $\overline{PP'_1}$, $\overline{PP_1}$, $\overline{PP'}$. Appelons $\overline{\mu\mu'_1}$, $\overline{\mu\mu_1}$ et $\overline{\mu\mu'}$ les déplacements correspondants de μ. En divisant par dt l'égalité géométrique $\overline{\mu\mu'_1} = \overline{\mu\mu_1} + \overline{\mu_1\mu'_1}$, et faisant tendre dt vers zéro, on voit sans peine, suivant un raisonnement bien connu, que l'on obtient à la limite l'égalité géométrique annoncée

$$v_a(\mu) = \rho(\mu) + \eta(\mu). \tag{1}$$

Théorème de composition des vitesses. — Si, en particulier, μ est le point M lui-même, $v_a(\mathrm{M})$, $\rho(\mathrm{M})$ et $\eta(\mathrm{M})$ deviennent respectivement la *vitesse absolue*

$$\overline{v_a} = \lim \frac{\mathrm{PP}'_1}{dt},$$

la *vitesse relative*

$$\overline{v_r} = \lim \frac{\mathrm{PP}_1}{dt}$$

de M, et la vitesse

$$v_c = \lim \frac{\mathrm{PP}'}{dt}$$

du point P de S avec lequel M coïncide à l'instant t; et l'égalité (1) devient

$$(2) \qquad \overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_c}.$$

Théorème de Coriolis. — L'accélération absolue $\overline{\gamma_a}$ de M étant, par définition, la dérivée géométrique $\frac{d\overline{v_a}}{dt}$ du vecteur v_a, on est conduit à dériver géométriquement (2); il vient

$$(3) \qquad \overline{\gamma_a} = \frac{d\overline{v_r}}{dt} + \frac{d\overline{v_c}}{dt}.$$

Pour interpréter ces deux derniers termes, menons les vecteurs $\overline{\mathrm{OR}}$ et $\overline{\mathrm{OK}}$ équipollents à $\overline{v_r}$ et $\overline{v_c}$; ces deux termes représentent respectivement les vitesses absolues des points R et K. Il est donc naturel d'appliquer à chacune le lemme; d'où

$$(4) \qquad \frac{d\overline{v_r}}{dt} = \rho(\mathrm{R}) + \eta(\mathrm{R}), \qquad \frac{d\overline{v_c}}{dt} = \rho(\mathrm{K}) + \eta(\mathrm{K}).$$

Mais, par définition, l'*accélération relative* $\overline{\gamma_r}$ de M est la dérivée géométrique de $\overline{v_r}$ dans la première hypothèse; c'est donc le vecteur $\rho(\mathrm{R})$; et son *accélération d'entraînement* $\overline{\gamma_c}$ est son accélération dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire la dérivée géométrique de la vitesse v_c de son point coïncident P, c'est donc $\eta(\mathrm{K})$. Ainsi donc

$$(5) \qquad \rho(\mathrm{R}) = \overline{\gamma_r}, \qquad \eta(\mathrm{K}) = \overline{\gamma_c}.$$

D'autre part, on voit facilement que

$$\eta(\mathrm{R}) = \rho(\mathrm{K}). \tag{6}$$

En effet, la différence géométrique entre le vecteur $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_1} - \overline{\mathrm{OP}}}{dt}$ et sa limite $\overline{v_r}$ est un vecteur qui tend vers zéro avec dt et que l'on peut, par suite, représenter par $\bar{\alpha}\, dt$; d'où

$$v_r = \frac{\overline{\mathrm{OP}_1} - \overline{\mathrm{OP}}}{dt} + \bar{\alpha}\, dt. \tag{7}$$

Appelons $\overline{v'_r}$ la position à l'instant $(t + dt)$ du vecteur $\overline{v_r}$ considéré comme fixé invariablement au corps S pendant le mouvement de celui-ci (2[e] hypothèse); $\overline{v'_r}$ est égale à $\lim \dfrac{\overline{\mathrm{P'P'_1}}}{dt}$ quand $\mathrm{P'_1}$ tend vers $\mathrm{P'}$ pour $dt = 0$.

Appelons enfin $\overline{v_{c_1}}$ la vitesse du point P_1 quand on le considère comme fixé à S, c'est-à-dire $\lim \dfrac{\mathrm{P_1 P'_1}}{dt}$. On pourra poser comme ci-dessus

$$(8) \left\{ \begin{aligned} &\overline{v'_r} = \frac{\overline{\mathrm{OP}'_1} - \overline{\mathrm{OP}'}}{dt} + \overline{\alpha'}\, dt, \\ &\overline{v_c} = \frac{\overline{\mathrm{OP}'} - \overline{\mathrm{OP}}}{dt} + \bar{\beta}\, dt, \qquad v_{c_1} = \frac{\mathrm{OP}'_1 - \mathrm{OP}_1}{dt} + \overline{\beta_1}\, dt. \end{aligned} \right.$$

De (7) et (8) on déduit

$$\frac{\overline{v'_r} - \overline{v_r}}{dt} - (\overline{\alpha'} - \bar{\alpha}) = \frac{\overline{v_{c_1}} - \overline{v_c}}{dt} - (\overline{\beta_1} - \bar{\beta}). \tag{9}$$

Les vecteurs $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta_1}$ étant fonctions continues de t, $(\alpha' - \alpha)$ tend vers zéro avec dt quand $\mathrm{P'}$ et $\mathrm{P'_1}$ tendent vers P et P_1, et de même $(\beta_1 - \beta)$, pourvu que P_1 et $\mathrm{P'_1}$ tendent vers P et P'. La limite du premier membre de (9) dans la première hypothèse, c'est-à-dire $\eta(R)$ est donc bien égale à la limite du second membre dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire $\rho(K)$.

Il suffit donc d'évaluer directement une de ces deux vitesses [1] $\eta(R)$ ou $\rho(K)$. Or $\eta(R)$, par exemple, est la vitesse de R dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire quand le vecteur $\overline{OR}$ subit simplement une rotation instantanée égale à celle du corps S, laquelle est représentée à l'instant t par un vecteur $\overline{O\omega}$ connu. Donc $\eta(R)$ est le moment de $\overline{O\omega}$ par rapport à R ou

$$\eta(R) = (\overline{O\omega}, R). \tag{10}$$

---

[1] On pourrait aussi bien calculer directement $\rho(K)$: Appelons V_A la vitesse absolue d'un point quelconque A de S et $\overline{A\Omega}$ un vecteur équipollent à $\overline{O\omega}$. On sait que l'on a dans le mouvement d'un solide S

$$v_c = V_A + (\overline{A\Omega}, P).$$

Or $\rho(K)$ est la dérivée géométrique de $\overline{v_c}$ dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire quand on suppose V_A et $\overline{A\Omega}$ invariables. Cherchons donc la limite de $\frac{v_{c_1} - v_c}{dt}$ dans ces conditions; v_{c_1} est égale à $\overline{V_A} + (\overline{A\Omega}, P_1)$. Donc $\overline{P\omega_1}$ étant mené équipollent à $\overline{A\Omega}$, $\rho(K)$ est la limite du moment $\frac{(\overline{P\omega_1}, P)}{dt}$. Mais puisque $\overline{v_r}$ est

$$\lim \frac{\overline{PP_1}}{dt},$$

on voit, en appelant r l'extrémité de $\overline{v_r}$, que l'on a bien

$$\rho(K) = (\overline{P\omega_1}, r) = (O\omega, R).$$

Remarquons, d'autre part, que $\overline{\gamma_c}$ ou $\eta(K)$ est au contraire la dérivée géométrique de $\overline{v_c}$, quand on suppose V_A et $\overline{A\Omega}$ seuls variables. On a donc, en posant $\frac{dV_A}{dt} = \gamma_A$,

$$\overline{\gamma_c} = \gamma_A + \left(\frac{d\overline{A\Omega}}{dt}, P\right).$$

En portant ces diverses valeurs dans (3), on obtient finalement l'égalité géométrique

$$\overline{\gamma_a} = \overline{\gamma_r} + \overline{\gamma_c} + 2(\overline{O\omega}, R), \tag{11}$$

qui est l'expression condensée du *théorème de Coriolis*.

C. Q. F. D.

Généralisation du théorème de Coriolis. — Si l'on avait dérivé (1) au lieu de (2), on aurait obtenu pour le point μ, en raisonnant comme ci-dessus, la relation suivante :

$$\overline{\gamma_a}(\mu) = \overline{\gamma_\rho}(\mu) + \overline{\gamma_\eta}(\mu) + 2(\overline{O\omega}, \rho), \tag{12}$$

$\overline{\gamma_a}(\mu)$ étant l'accélération absolue de μ; $\overline{\gamma_\rho}(\mu)$, $\overline{\gamma_\eta}(\mu)$ ses accélérations dans les première et deuxième hypothèses, et ρ étant l'extrémité du vecteur $\rho(\mu)$. Quand μ est le point M, on retombe sur la relation (11).