Nathan Altshiller-Court

Sur la cubique à point double

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 424-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__424_0>

[M¹5]

SUR LA CUBIQUE A POINT DOUBLE;

PAR M. NATHAN ALTSHILLER-COURT,
Docteur ès Sciences,
Professeur assistant à l'Université de l'État d'Oklahoma (États-Unis).

1. Une conique Σ_n, passant par deux couples de points *correspondants* AA′, BB′ d'une cubique (C_4^3) à point double O, rencontre la cubique en deux autres points M, M′. On sait que les couples de points correspondants d'une cubique à point double sont projetés d'un point quelconque de la courbe suivant une involution de rayons dont un des éléments doubles passe par le point double de la cubique. Ainsi, on a l'involution

$$\text{(I)} \qquad M(AA', BB', OO).$$

D'autre part, les deux couples de points donnés déterminent sur Σ_n une involution de points ayant pour pôle le point $R \equiv (AA', BB')$, pour polaire la droite joignant les deux points $C \equiv (AB, A'B')$, $C' \equiv (AB', A'B)$, et dont les points doubles sont les points d'intersection N, N′ de Σ_n avec CC′. En projetant cette involution du point M de la conique, on obtient l'involution de rayons

$$\text{(J)} \qquad M(AA', BB', NN, N'N').$$

Les deux involutions (I) et (J) ont deux couples d'éléments communs, elles sont donc identiques, et le rayon double MO de la première coïncide avec un des éléments doubles, disons MN, de la seconde. Ainsi les trois points M, N, O sont collinéaires. On montrera de la même manière que les trois points M′, N′, O sont également collinéaires.

Les quatre points M, M′, N, N′ déterminent un quadrangle complet inscrit dans Σ_n, dont les sommets du triangle diagonal sont O ≡ (MN, M′N′), U ≡ (MM′, NN′), U′ ≡ (MN′, M′N). Lorsque la conique Σ_n décrit le faisceau de coniques (Σ) ayant pour base les points A, A′, B, B′, la droite MM′ passe par un point fixe L de la cubique (C_4^3), le *corésiduel* des points A, A′, B, B′ (théorème de Chasles). La droite fixe OL coupe le faisceau harmonique de droites ayant pour centre le point U en trois points fixes O, L, V ≡ (OL, UCC′), le quatrième point O′ ≡ (OL, UU′) est donc également fixe. Or, UU′ est la polaire de O par rapport à Σ_n, donc le point O′ est identique avec le conjugué de O par rapport au faisceau de coniques (Σ). Ainsi : *Le corésiduel des deux couples de points correspondants d'une cubique à point double* (C_4^3) *est collinéaire avec le point double et le conjugué du point double par rapport au faisceau de coniques déterminé par les quatre points donnés.*

La notation (C_4^3) désignera dans la suite une cubique à point double.

2. Le point U (1) est le pôle de OU′ par rapport à Σ_n, et puisque U est sur la droite CC′NN′, sa polaire OU′ passe par le pôle R de CC′ (1). La droite OR, passant par deux points fixes O et R, est elle-même une droite fixe, et il en est de même du point F ≡ (OR, CC′).

A la conique Σ_n du faisceau (Σ) correspond dans le faisceau de rayons (L) la droite LU qui projette de L le conjugué harmonique U du point fixe F par rapport au couple de points N, N′ déterminé par Σ_n sur CC′. Cette construction montre qu'à la conique Σ_f de (Σ) passant par F correspond le rayon LF, c'est-à-dire le point F est sur (C_4^3). Ainsi : si AA′, BB′ sont deux couples de points correspondants d'une (C_4^3), les points $C \equiv (AB, A'B')$, $C' \equiv (AB, A'B)$ forment un troisième couple de points correspondants de la courbe (Maclaurin) [1]. *Le point d'intersection des droites* AA′, BB′ *est collinéaire avec le point double de la courbe et le troisième point commun à la cubique et la droite* CC′.

3. La construction du corésiduel [2] L des points A, A′, B, B′ (1) montre que L est le tangentiel commun des points C est C′. Il s'ensuit que F (2) est le point correspondant de L (Maclaurin) [3]. Maintenant, si l'on prend pour C un point fixe de la courbe, son tangentiel L ainsi que son point correspondant C′ sont déterminés, ce qui détermine le correspondant F de L. Par conséquent : si, d'un point fixe C d'une (C_4^3), on projette un couple quelconque de points correspondants AA′, les droites CA, CA′ recoupent la courbe en un couple de points correspondants BB′ (Maclaurin) [4].

a. Le lieu du point d'intersection des droites AA′, BB′ *est une droite passant par le point double de*

---

(1) De Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, p. 243. Paris, 1856.

(2) G. Salmon, *Géométrie analytique*, traduction O. Chemin, p. 193-194. Gauthier-Villars, 1903.

(3) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 226, prop. VII.

(4) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 239, prop. XV.

la courbe et par le point correspondant du tangentiel de C.

b. Le conjugué du point double de la cubique par rapport au faisceau de coniques ayant pour base le système variable de points A, A′, B, B′ *est un point fixe*, car C détermine les points C′ et L, donc le point V ≡ (OL, CC′) est déterminé, et (OO′LV) = −1 (**1**).

4. Les trois couples de points correspondants AA′, BB′, CC′ (**1**, **3**) sont les couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet inscrit dans (C_4^3). Soient R ≡ (AA′, BB′), P ≡ (BB′, CC′), Q ≡ (CC′, AA′) les sommets de son triangle diagonal. Le point F ≡ (OR, CC′) appartient à la cubique (**3**), et il en est de même, pour des raisons analogues, des points D ≡ (OP, AA′) et E ≡ (OQ, BB′). Les tangentiels L′, L″, L des trois couples AA′, BB′, CC′ sont collinéaires (Maclaurin) [1]. Il s'ensuit que les trois couples de points correspondants DL′, EL″, FL (**3**) ont leurs tangentiels M_1, M″, M‴ en ligne droite. Le tangentiel du troisième point d'intersection G de la droite DE avec la cubique est collinéaire avec les tangentiels M_1 et M″ de D et E, ce tangentiel est donc le point M‴. Or, les points de contact des tangentes issues de M‴ sont les points L et F, par hypothèse; le point G coïncide donc avec un de ces deux points, et puisque les points D, E, F ne sont pas collinéaires, le point G coïncide avec L. Ainsi : *Si un quadrilatère complet est inscrit dans une* (C_4^3), *les droites joignant le point double aux sommets du triangle diagonal rencontrent les côtés opposés respectifs en trois points de la cubique.*

---

[1] De Jonquières, *loc. cit.*, p. 223, prop. VI.

Les côtés du triangle ainsi formé recoupent la cubique aux tangentiels respectifs des couples de sommets opposés du quadrilatère donné.

5. Nous dirons que la droite joignant les deux points de contact des tangentes issues d'un point d'une (C_4^3) est la *corde associée* à ce point.

Les points M, M' de la conique Σ_n (1) sont séparés harmoniquement par le point U et sa polaire OF par rapport à Σ_n (3). On retrouve ainsi un théorème de Maclaurin [1] : *Si, par un point d'une* (C_4^3), *on mène une sécante quelconque, les deux points d'intersection de la sécante avec la cubique sont séparés harmoniquement par la trace de la sécante sur la corde associée au point et par la droite joignant le point double au point correspondant du point donné.*

6. Considérons la conique Σ_l du faisceau (Σ) passant par L. Cette conique rencontre OL encore au conjugué harmonique V de L par rapport aux points doubles O, O' de l'involution déterminée par (Σ) sur OL. Le second point d'intersection de Σ_l avec CC' est le conjugué harmonique V' de V par rapport au couple C, C'. Dans le faisceau de rayons (L) à Σ_l correspond la droite LF' joignant L au conjugué harmonique F' de F par rapport au couple V, V' (2). Un des points d'intersection de LF' avec Σ_l coïncide avec L, de sorte que la droite LF' est tangente à la cubique en L. Le second point M''' commun à Σ_l et LF' est le tangentiel de L, et les trois points O, V', M''' sont collinéaires (1). Les quatre points C, C', V, V' étant harmoniques.

(1) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 237, prop. XIV.

on a : *Les deux droites projetant du point double d'une* (C_4^3) *un couple de points correspondants de la courbe sont séparées harmoniquement par les droites projetant du même point le premier et le second tangentiels de ce couple.*

7. Les tangentes LC, LC′ forment un couple de rayons correspondants dans l'involution qui projette de L les couples de points correspondants de la cubique, et la droite OLV est un rayon double de cette involution. Le second rayon double est donc la droite LV′ (6). Or, la droite LF joignant L à son correspondant F (3) et la tangente LF′ en L sont séparées harmoniquement par LV, LV′ (6), donc : *La tangente en un point d'une* (C_4^3) *et la droite joignant ce point à son correspondant sont conjuguées dans l'involution projetant du point considéré les couples de points correspondants de la courbe.* (Théorème connu.)

8. La droite MN′(M′N), second élément double de l'involution de rayons qui projettent de M(M′) les couples de points correspondants de la cubique (1), est, comme on sait, tangente à la conique ω, enveloppe des droites joignant les couples de points correspondants de la courbe. Lorsque la conique Σ_n décrit le faisceau (Σ), le point $U' \equiv$ (MN′, M′N) décrit la droite fixe OF (1), de sorte que les tangentes U′MN, U′M′N′ décrivent une involution sur ω, dont la polaire est OF. La conjuguée harmonique U′O′ de U′OF par rapport au couple variable de tangentes U′N, U′N′ passe par le point fixe O′, donc O′ est le pôle de l'involution de tangentes sur ω. Or, la droite OU′ passe par O, donc O′ se trouve sur la polaire i de O par rapport à ω, laquelle polaire est, comme on sait, la

droite inflexionnelle de la courbe. On en trouvera d'ailleurs une démonstration plus loin. Ainsi : *Le conjugué du point double d'une* (C_4^3) *par rapport à un faisceau de coniques ayant pour base deux couples de points correspondants de la courbe est à l'intersection de la droite inflexionnelle avec la droite projetant du point double le corésiduel des points donnés* (1).

Conséquence : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du conjugué du point double par rapport au faisceau de coniques variable ayant pour base deux couples de points correspondants quelconques de la cubique.*

9. On a vu (1) que $(OO'LV) = -1$. Si L coïncide avec un point I commun à *i* (8) et à la cubique, le point O' coïncide avec I, il en sera donc de même du point V, c'est-à-dire que la corde associée à I passera par ce point, ce qui montre que I est un point d'inflexion. Ainsi un point d'intersection quelconque de la cubique avec *i* est un point d'inflexion, cette droite est donc la droite inflexionnelle, comme on vient de l'annoncer (8).

Dans la suite, la conique enveloppée par les droites joignant les couples de points correspondants d'une (C_4^3) sera désignée par la lettre ω.

Des deux tangentes qu'on peut mener d'un point L de la cubique à sa conique ω, l'une est la droite LF joignant L à son point correspondant F (3); l'autre tangente LV' est celui des deux éléments doubles de l'involution de rayons projetant de L les couples de points correspondants, qui ne passe pas par le point double de la courbe. Cette droite projette de L un couple de points correspondants collinéaire avec L.

Dans la suite, cette droite sera appelée « la droite double du point L ».

10. Les tangentes U'N, U'N' (8) à la conique ω déterminent sur la tangente fixe CC' à ω le couple de points NN' séparés harmoniquement par les points fixes C, C' (1). Lorsque U' varie sur OF, l'involution de tangentes sur ω détermine sur CC' une involution de points dont les éléments doubles sont C, C'. Au point F (3) déterminé sur CC' par la polaire OF de l'involution de tangentes sur ω, correspond dans l'involution de points sur CC' le point de contact de CC' avec ω. Donc : *Le conjugué harmonique, par rapport à un couple de points correspondants d'une* (C_4^3), *du troisième point d'intersection avec la cubique de la droite joignant ces deux points, est le point de contact de cette droite avec la conique* ω *de la cubique.* (Théorème connu.)

11. Les points doubles C, C' (10) de l'involution sur CC' déterminée par l'involution de tangentes sur ω sont les traces sur CC' des rayons doubles de cette involution. Ces rayons passent par le pôle O' (8) de l'involution de tangentes. Il s'ensuit que : *Un couple de points correspondants d'une* (C_4^3) *est projetée du point de la droite inflexionnelle collinéaire avec leur tangentiel et le point double de la courbe, suivant deux tangentes à la conique* ω *de la cubique.*

Conséquence : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du point d'intersection des droites doubles* (9) *d'un couple variable de points correspondants de la courbe.*

12. Les deux tangentes O'C, O'C' issues du point

O′ de i à la conique ω sont séparées harmoniquement par i et la droite joignant O′ au pôle O de i par rapport à ω (8). La droite i passe donc par le conjugué harmonique V′ de V par rapport à C, C′. Donc (6) : *La droite double d'un point d'une* (C_4^3), *la corde associée à ce point, la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe et la droite inflexionnelle de la cubique, sont concourantes.*

Ces quatre droites forment un faisceau harmonique, car $(OO'LV') = -1$ (1).

Conséquences : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du point d'intersection : a. de la droite double* (9) *d'un point variable de la courbe avec la corde associée à ce point; b. de la corde associée à un point variable de la courbe avec la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe; c. de la droite double d'un point variable de la courbe avec la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe.*

13. En coupant le faisceau harmonique (12) par la tangente LF′M‴ au point L à la cubique, on obtient la proposition : *La tangente en un point d'une* (C_4^3) *est coupée par la corde associée au point de contact et par la droite inflexionnelle de la courbe en deux points, lesquels, avec le point de contact et son tangentiel, forment une division harmonique.*

14. Les deux tangentes issues d'un point L d'une (C_4^3) à sa conique ω (9) coïncident si L appartient aussi à ω, et la tangente en L à la cubique coïncide alors avec elles (7); il s'ensuit que les deux courbes sont tangentes en chaque point qu'elles ont en commun.

Le point correspondant F (3) de L est situé sur une des tangentes de L à ω (9) et sur la polaire, par rapport à ω, du point $O' \equiv (i, OL)$ (8). Si L coïncide avec un point d'inflexion I, le point O' coïncide avec I (9), donc le point correspondant I' de I est le point d'intersection de la polaire p de I par rapport à ω avec une tangente à ω issue de I, c'est-à-dire I' appartient aussi à ω. Donc : *Une* (C_4^3) *est tangente à sa conique* ω *aux points où la cubique est touchée par les tangentes issues de ses trois points d'inflexion* (¹).

15. Soient $X \equiv ip$ (14), Y le second point d'intersection de p avec ω, Z la trace sur p de la tangente en I (14) à la cubique. On a (7)

$$(OYI'Z) = -1 \quad \text{ou} \quad (OI'YZ) = 2;$$

on a aussi

$$(OXI'Y) = -1 \quad \text{ou} \quad (OI'YX) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$(OXI'Z) = -3.$$

Ainsi : *La tangente issue d'un point d'inflexion d'une* (C_4^3) *correspond à la tangente en ce point à la courbe dans une homologie dont le centre et l'axe sont respectivement le point double et la droite inflexionnelle de la cubique, le rapport anharmonique étant égal à* -3.

16. Les points O, O' (1) séparent harmoniquement le point L de sa projection V, faite de O, sur la corde associée à L (3, 5). Le point O' appartenant à la droite fixe i (8), on a : *La projection d'un point variable*

(¹) C. SERVAIS, *Mathesis*, 1887, p. 73.

d'une (C_4^3), *faite du point double, comme centre, sur la corde associée au point variable, décrit une cubique* (H), *qui est la transformée de la courbe donnée dans une homologie harmonique ayant pour centre et axe respectivement le point double et la droite inflexionnelle de la courbe donnée.*

La courbe (H) sera appelée, dans la suite, « l'harmonique » de la courbe donnée.

Du mode de génération de (H), il suit que la cubique et sa courbe harmonique ont même point double, mêmes tangentes au point double et mêmes points d'inflexion.

Observons aussi que *la* (C_4^3) *et son harmonique* (H) *ont même conique* ω, car le centre O et l'axe d'homologie i étant pôle et polaire par rapport à ω (8), cette conique se correspond à elle-même dans la transformation considérée.

17. Le point F étant le correspondant de L (3), les deux tangentes issues de M''' à la cubique sont M'''L et M'''F (6). Le faisceau M'''(FLOV) est harmonique, car il est perspectif à (FF'V'V) = — 1 ; il s'ensuit (7) que M'''V est la droite double de M''', de sorte que V est le point d'intersection de la corde associée à L avec la droite double du tangentiel M''' de ce point. Donc (16) : *La corde associée d'un point d'une* (C_4^3) *rencontre la droite double du tangentiel de ce point sur l'harmonique de la courbe donnée.*

18. La droite CC' joint le point C à son correspondant C' (2), le point M''' est le second tangentiel de C (4, 17); donc (16, 17) : *La droite joignant un point d'une* (C_4^3) *à son point correspondant et la droite double du second tangentiel du point considéré se coupent sur l'harmonique de la courbe donnée.*

19. La droite FCC′ projette du point F le couple de points correspondants CC′ collinéaire avec F, c'est donc la droite double de F(9). Le point M‴ est le tangentiel de F (4). Par conséquent (16, 17) : *La droite double d'un point d'une* (C_4^3) *et la droite double du tangentiel de ce point se coupent sur l'harmonique de la courbe donnée.*