NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Étude des surfaces de translation de Sophus Lie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 401-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__401_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[O¹6s]

ÉTUDE DES SURFACES DE TRANSLATION DE SOPHUS LIE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Sophus Lie a déterminé les surfaces de translation qui possèdent soit *deux* modes, soit une *infinité* de modes de génération comme surfaces de translation. Poincaré est revenu sur ce sujet et Darboux a imaginé en dernier lieu une méthode toute élémentaire, d'une élégance remarquable pour retrouver les surfaces de Lie (*Théorie des Surfaces*, t. I, 2e édition, p. 151).

Je crois intéressant de rendre accessibles ces résultats et de faire en particulier le dénombrement des surfaces algébriques qui rentrent dans les surfaces de Lie, en général transcendantes.

La partie difficile du problème est d'arriver à l'expression analytique par certaines intégrales abéliennes des coordonnées d'un point courant de la surface. Je me borne donc à partir de ces formules; je reprends la démonstration de Darboux, qui établit que les surfaces ainsi conçues *a priori* satisfont bien aux conditions imposées. J'insiste sur quelques propriétés qui jouent un rôle important, à savoir l'existence d'un centre de symétrie dans le cas le plus général.

Je cherche ensuite les conditions pour que la surface soit algébrique, ce qui donne une application intéressante des intégrales curvilignes aux courbes unicursales des troisième et quatrième ordres, en même temps

qu'une classification de ces courbes. J'indique ensuite tous les types algébriques.

Certaines surfaces minima transcendantes rentrent dans le problème de Lie; je les détermine et finis par une application très simple à l'espace à $n+1$ dimensions.

1. Soit la quartique plane Q la plus générale d'équation cartésienne $F(x, y) = 0$: elle peut être indécomposable ou bien décomposable (cubique et droite; deux coniques; une conique et deux droites; quatre droites). Je prends sur elle n points fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Au point A_i j'associe un point variable M_i de Q et je considère la courbe gauche C_i lieu du point X_i, Y_i, Z_i défini par les intégrales curvilignes prises le long de Q

$$(1) \qquad X_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{x\,dx}{F'_y}, \qquad Y_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{y\,dx}{F'_y},$$
$$Z_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{dx}{F'_y}.$$

La courbe C_i admet pour cône directeur des tangentes le cône dont la trace sur le plan $z = 1$ a pour équation $F(x, y) = 0$. Si la quartique Q est indécomposable, les courbes $C_1, C_2, \ldots$ coïncident les unes avec les autres par une simple translation. Si la quartique Q se décompose, le point A_i est pris sur l'un des morceaux, soit q; le point M_i sera simplement assujetti à être sur q lui aussi; la courbe gauche C_i a pour cône directeur des tangentes celui qui a pour trace dans le plan $z = 1$ précisément la courbe q. Au cas où l'un des morceaux de décomposition de Q est une droite, nous éviterons de prendre deux couples (A_i, M_i) et (A_j, M_j) sur cette droite.

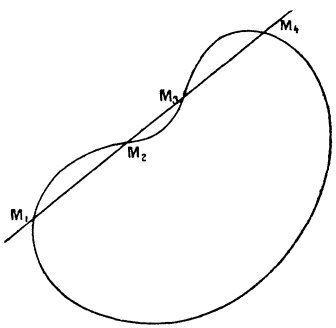
Je considère alors la surface Σ représentée par les

équations paramétriques

$$(2) \qquad \Sigma \begin{cases} \xi = X_1 + X_2, \\ \eta = Y_1 + Y_2, \\ \zeta = Z_1 + Z_2. \end{cases}$$

C'est manifestement une surface de translation; le point μ de Σ correspondant à M_1 et M_2 peut être considéré comme parfaitement déterminé par M_1 et M_2 : nous pourrons donc adopter une représentation plane particulière de Σ qui consiste à tracer la courbe plane Q et à indiquer M_1 et M_2. D'après ce qui a été dit sur les cônes directeurs des tangentes de C_1 et C_2 nous pouvons même remarquer que si Q est tracée dans le plan $z = 1$, le plan mené de l'origine parallèlement au plan tangent de la surface en μ a précisément pour trace sur le plan $z = 1$ la droite M_1M_2, ce qui donne une représentation à la fois des éléments ponctuels et tangentiels de Σ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Menons donc la droite M_1M_2; elle perce Q en deux autres points M_3, M_4 et je considère la surface Σ' lieu du point $\mu'(\xi', \eta', \zeta')$

$$(3) \qquad \Sigma' \begin{cases} \xi' = X_3 + X_4, \\ \eta' = Y_3 + Y_4, \\ \zeta' = Z_3 + Z_4. \end{cases}$$

Il est bien clair que, si Q est indécomposable ou bien si Q est décomposable en deux coniques véritables avec cette condition que M_1 soit sur l'une et M_2 sur l'autre, les deux surfaces Σ et Σ' coïncident par une translation, μ et μ' étant deux points où les plans tangents sont parallèles; dans tous les autres cas Σ et Σ' sont deux surfaces ne pouvant coïncider par une translation. Mais, propriété curieuse, dans tous les cas, sans exception, Σ et Σ' sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain point fixe ω; μ et μ' se correspondent dans cette symétrie.

La démonstration est très simple : je rappelle d'abord que, si $\theta(x)$ est un polynome entier en x du quatrième degré à racines x_1, x_2, x_3, x_4 distinctes, la décomposition en éléments simples des fractions $\frac{1}{\theta(x)}$, $\frac{x}{\theta(x)}$, $\frac{x^2}{\theta(x)}$ fournit immédiatement les relations

$$(4)\quad \sum_1^4 \frac{1}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{x_i}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{x_i^2}{\theta(x_i)} = 0.$$

Introduisons maintenant l'equation $y = p + qx$ de la droite M_1M_2; on pourra prendre p et q comme paramètres indépendants au lieu des abscisses x_1 et x_2 de M_1 et M_2; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre racines de l'equation

$$(5)\qquad F(x, p + qx) \equiv \theta(x, p, q) = 0.$$

Puisque x_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, est une fonction de p, q satisfaisant toujours à $\theta(x_i, p, q) = 0$, on a

$$(6)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,\partial x_i + \frac{\partial\theta}{\partial p}(x_i, p, q)\,dp + \frac{\partial\theta}{\partial q}(x_i, p, q)\,dq = 0.$$

On a évidemment

$$(7)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial q} = x\frac{\partial F}{\partial y},$$

de sorte que l'équation (6) peut prendre la forme

$$(8)\qquad \frac{dr_i}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i)} + \frac{dp + r_i\, dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x_i, p, q)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans les formules (4), les coefficients du polynome $\theta(x)$ peuvent dépendre ou non de paramètres arbitraires; si nous les appliquons au polynome $\theta(x, p, q)$, on a par des combinaisons simples

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_1^4 \frac{dp + x\, dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \qquad \sum_1^4 x_i \frac{dp + x_i\, dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^4 y_i \frac{dp + x_i\, dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = \sum (p + q x_i) \frac{dp + x_i\, dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \end{array}\right.$$

on deduit donc de (8) et (9)

$$(10)\qquad \sum_1^4 dX_i = 0, \qquad \sum_1^4 dY_i = 0, \qquad \sum_1^4 dZ_i = 0.$$

Les sommes

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \quad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4, \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

sont donc egales respectivement à des constantes $2a$, $2b$, $2c$. Le point a, b, c est le milieu de tous les segments μ, μ', ce qui démontre la proposition. Si l'on fait varier la position d'un point A_i, on ne fait qu'imprimer un mouvement de translation a Σ ou Σ'; profitons de cette remarque pour prendre pour les points A_i, comme pour les points M_i, quatre points en ligne droite; alors a, b, c sont nuls tous trois, comme on le voit en faisant venir M_i en A_i; nous supposerons donc cette condition vérifiée; l'origine est donc centre de symetrie pour Σ et Σ'.

La proprieté qui précède peut être interprétee à un

autre point de vue : j'écris

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = X_1 + X_2 = -X_3 - X_4, \\ \eta = Y_1 + Y_2 = -Y_3 - Y_4, \\ \zeta = Z_1 + Z_2 = -Z_3 - Z_4. \end{cases}$$

Appelons $(-C_i)$ la courbe gauche lieu du point $(-X_i, -Y_i, -Z_i)$. Les formules (11) montrent que la surface Σ qui est déjà surface de translation engendrée par le couple C_1, C_2 est encore surface de translation engendrée par le couple $(-C_3)$, $(-C_4)$.

La droite $M_1M_2M_3M_4$ nous a donné déjà deux surfaces Σ, Σ', analytiquement distinctes ou non, en associant les couples M_1M_2 et M_3M_4. Nous définirons de même les surfaces Σ_1, Σ'_1 en prenant les couples M_1M_3 et M_2M_4 et les surfaces Σ_2, Σ'_2 en prenant les couples M_1M_4 et M_2M_3. On remarquera que si Q est indécomposable, Σ, Σ_1, Σ_2 ne diffèrent que par une translation; Σ' n'étant autre que Σ sauf translation, la surface Σ admet un centre de symétrie.

Si Q se décompose en une droite et une cubique, je supposerai A_1 et M_1 sur la droite; C_1 est une courbe plane, mais à part cela Σ, Σ_1, Σ_2 ne diffèrent encore que par une translation; aucune des surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 ne pouvant coïncider par translation avec Σ' ou Σ'_1 ou Σ'_2, on voit que chacune á perdu la propriété d'avoir un centre de symétrie. Chacune de ces six surfaces admet comme dans le cas général deux modes de génération distincts comme surface de translation; dans l'un des deux modes, l'une des courbes génératrices est plane.

2. Des propriétés toutes nouvelles se présentent si la quartique Q se décompose en deux coniques, que je supposerai d'abord non décomposables elles-mêmes. Posons $F(x,y) \equiv A(x,y)B(x,y)$ et supposons M_1,

M_2 choisis sur la conique A, M_3 et M_4 choisis sur la conique B. Les deux courbes C_1 et C_2 ne diffèrent que par une translation; les deux courbes C_3 et C_4 possèdent cette même propriété, mais ne sont pas égales aux courbes C_1 et C_2. Les surfaces Σ et Σ' non superposables sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine; les formules (11) montrent encore la double génération de Σ par le couple C_1, C_2 ou le couple $(-C_3, -C_4)$, mais nous allons montrer à l'instant que l'on peut substituer au couple $(-C_3, -C_4)$ une infinité d'autres, et de même au couple C_1, C_2, de sorte que Σ admet une infinité de modes de génération.

Les surfaces Σ_1, Σ_2, Σ'_1, Σ'_2 ne diffèrent que par une translation.

Je rappelle que nous devons écrire ici

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \int_{A_1}^{M_1} \frac{x\,dx}{\frac{\partial A}{\partial y} B(x,y)}, & X_2 &= \int_{A_2}^{M_2} \frac{x\,dx}{\frac{\partial A}{\partial y} B(x,y)}, \\ X_3 &= \int_{A_3}^{M_3} \frac{x\,dx}{A(x,y)\frac{\partial B}{\partial y}}, & X_4 &= \int \frac{x\,dx}{A(x,y)\frac{\partial B}{\partial y}}, \end{aligned}\right.$$

et formules analogues pour $Y_1, Y_2, \ldots, Z_4$. Les intégrales curvilignes sont prises soit sur la conique A, soit sur la conique B. Remplaçons la conique B par la conique

$$B(x,y) - \rho A(x,y) = 0,$$

qui appartient au faisceau linéaire ponctuel (A, B), nous ne changeons pas les expressions de X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2; les courbes C_1 et C_2 et par suite la surface Σ ne changent pas; mais les courbes C_3 et C_4 sont remplacées par d'autres courbes; chaque valeur de ρ donne donc un nouveau couple de translation se substituant à $(-C_3, -C_4)$ pour la génération de Σ. Dans cette

opération, la variation de ρ fait changer les surfaces Σ_1 et Σ_2.

De même si je remplace la conique $A(x, y) = 0$ par la conique $A(x, y) - \sigma B(x, y) = 0$, on ne change pas sur Σ le couple $(-C_3, -C_4)$, mais on remplace le couple (C_1, C_2) par un nouveau couple pour chaque valeur de σ. La surface Σ admet donc une infinité de modes de génération comme surface de translation; je désigne par B_ρ la conique d'équation $B - \rho A = 0$; par A_σ la conique d'équation $A - \sigma B = 0$; si l'on remplace le couple de coniques (A, B) par le couple (A, B_ρ), les courbes $(-C_3, -C_4)$ qui engendrent Σ sont remplacées par les courbes $-C'_3$, $-C'_4$ définies par les intégrales curvilignes prises le long de B_ρ :

$$(13) \qquad -X'_3 = -\int \frac{x\,dx}{A\left[\frac{\partial B}{\partial y} - \rho \frac{\partial A}{\partial y}\right]}, \quad \ldots.$$

De même si l'on remplace (A, B) par (A_σ, B), le couple (C_1, C_2) est remplacé par le couple C'_1, C'_2 défini par les intégrales curvilignes prises le long de A_σ

$$(14) \qquad X_1 = \int \frac{x\,dx}{B\left[\frac{\partial A}{\partial y} - \sigma \frac{\partial B}{\partial y}\right]}, \quad \ldots.$$

Supposons alors que $\sigma = \frac{1}{\rho}$, les coniques A_σ et B_ρ coïncident; comme le long de B_ρ on a $B = \rho A$, on voit immédiatement que les formules (14) reviennent aux formules (13), de sorte que tous les modes de génération de la surface sont obtenus en conservant A et remplaçant B par la conique B_ρ.

Dans un faisceau ponctuel de coniques, il y en a trois qui se réduisent à un ensemble de deux droites, en nous bornant au cas le plus général; donc chacune de ces coniques donnera un mode de génération particu-

lier de Σ par deux courbes planes; il y a donc sur Σ six séries de courbes planes égales, dont la translation reproduit la surface.

Ceci dispense donc d'étudier le cas où les deux coniques A et B elles-mêmes sont dégénérées chacune en deux droites; les trois surfaces Σ, Σ_1 et Σ_2 obtenues ne sont pas plus générales que la surface Σ fournie par deux coniques véritables.

Dans le cas où A (lieu de M_1 et M_2) est une conique véritable, et B un ensemble de deux droites, la surface Σ est toujours l'une de celles que peut fournir un système de deux coniques véritables; mais la surface Σ_1 n'admet que deux modes de génération comme surface de translation, avec cette particularité que dans chacun d'eux l'une des courbes est plane.

Un cas exceptionnel se présente, à savoir celui où toutes les coniques du faisceau ponctuel se composent de deux droites; il suffit pour cela que les deux droites dont se compose A aient même point de concours que les deux droites dont se compose B; la surface Σ est alors un paraboloïde elliptique ou hyperbolique. Nous y reviendrons ultérieurement.

3. Une remarque élémentaire simplifie l'étude des divers cas possibles, soit au point de vue de la forme, soit au point de vue de la réalité de toutes les surfaces de Sophus Lie. Effectuer sur les variables (x, y) la transformation homographique la plus générale du plan

$$(15)\qquad x = \frac{Ax' + By' + C}{A''x' + B''y' + C''}, \qquad y = \frac{A'x' + B'y' + C'}{A''x' + B''y' + C''}$$

revient à effectuer sur chacune des courbes C_i et par suite sur toutes les surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 considérées la substitution homographique la plus générale qui con-

serve le plan de l'infini, définie en même temps que la substitution (15) par les formules

$$(16)\qquad \begin{cases} X_i = A\,X'_i + B\,Y'_i + C\,Z_i\,, \\ Y_i = A'X'_i + B'Y'_i + C'Z'_i\,, \\ Z_i = A''X'_i + B''Y''_i + C''Z'_i\,. \end{cases}$$

Pour le voir aisément, rendons d'abord l'équation $F(x, y) = 0$ homogène, ce qui revient à remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, $F(x, y)$ par $\frac{1}{z^4}F(x, y, z)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ par $\frac{1}{z^3}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)$.

Les coordonnées X_i, Y_i, Z_i sont alors définies par les formules

$$(17)\qquad \begin{cases} X_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{x(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \\ Y_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{y(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \\ Z_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{z(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \end{cases}$$

Les relations, vérifiées le long de Q,

$$(18)\qquad \begin{cases} x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y} + z\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ dx\,\frac{\partial F}{\partial x} + dy\,\frac{\partial F}{\partial y} + dz\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

donnent, le long de Q,

$$(19)\qquad \frac{y\,dz - z\,dy}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{z\,dx - x\,dz}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$= \frac{B(y\,dz - z\,dy) + B'(z\,dx - x\,dz) + B''(x\,dy - y\,dx)}{B\frac{\partial F}{\partial x} + B'\frac{\partial F}{\partial y} + B''\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Si l'on remarque qu'avec les nouvelles notations la substitution (15) est devenue

$$(15') \qquad \begin{cases} x = A\,x' + B\,y' + C\,z', \\ y = A'x' + B'y' + C'z', \\ z = A''x' + B''y' + C''z', \end{cases}$$

et si l'on définit la fonction $F'(x', y', z')$ par la relation

$$(20) \qquad F(x, y, z) \equiv F'(x', y', z') \times \Delta,$$

où Δ est le déterminant de la substitution (15'), le dénominateur du dernier rapport (19) est $\Delta \times \frac{\partial F'}{\partial y'}$. Le numérateur est le déterminant

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ B & B' & B'' \end{vmatrix}$$

manifestement égal au produit des deux déterminants

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ dx' & dy' & dz' \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta(z'\,dx' - x'\,dz').$$

Nous pouvons donc écrire

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{z\,dx - x\,dz}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \dfrac{z'\,dx' - x'\,dz'}{\dfrac{\partial F'}{\partial y'}}, \\ X'_i = \displaystyle\int_{A'_i}^{M'_i} \frac{x'(z'\,dx' - x'\,dz')}{\dfrac{\partial F'}{\partial y'}}, \qquad Y'_i = \ldots, \qquad Z'_i = \ldots, \end{cases}$$

et alors les formules (17) se réduisent manifestement aux équations (16).

Cette remarque est précieuse pour obtenir les formes réduites des équations des surfaces Σ, surtout dans les cas de décomposition de la quartique Q.

4. Je traite immédiatement deux cas très simples, celui du paraboloïde et celui de l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Soit un paraboloïde rapporté à un système de deux plans diamétraux conjugués et au plan tangent à l'extrémité du diamètre correspondant. L'équation de la surface est

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \tag{24}$$

qui montre immédiatement que les deux paraboles diamétrales peuvent engendrer par la surface comme surface de translation; il suffit d'écrire les expressions paramétriques

$$\left\{\begin{aligned} x &= x + 0, \\ y &= 0 + y, \\ z &= \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Réciproquement, si une surface du second degré (non cylindrique) est surface de translation, chaque courbe de translation devant être la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est une courbe plane diamétrale; dans le mouvement de translation, on a donc une famille de courbes diamétrales égales dans des plans parallèles, circonstance qui caractérise le paraboloïde.

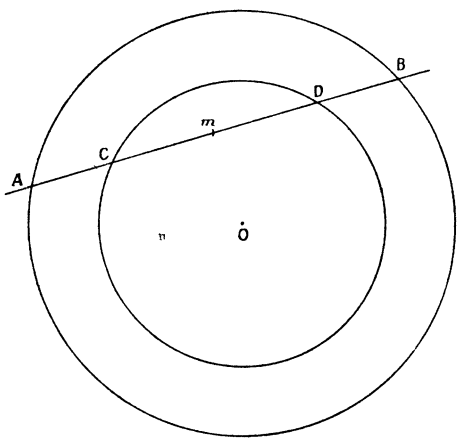
Un second exemple obtenu par des considérations élémentaires n'exigeant aucune quadrature est obtenu en étudiant deux cercles concentriques (*fig.* 2). Je les coupe par une droite arbitraire qui donne les points A, B sur le premier et C, D sur le second; soient R_1, R_2 les rayons; φ et φ' les arguments de A et B, ψ et ψ' ceux de C et D. En exprimant que m milieu de AB est aussi celui de CD et que la droite Om est bissectrice de AOB

ou COD, on a évidemment

$$(26)\quad \begin{cases} R_1(\cos\varphi + \cos\varphi') = R_2(\cos\psi + \cos\psi'), \\ R_1(\sin\varphi + \sin\varphi') = R_2(\sin\psi + \sin\psi'), \\ \dfrac{\varphi + \varphi'}{2} = \dfrac{\psi + \psi'}{2}, \end{cases}$$

la dernière équation nécessitant que l'on choisisse con-

Fig. 2.



venablement les déterminations des arguments. Si donc on pose

$$(27)\quad \begin{cases} x = \cos\varphi + \cos\varphi', \\ y = \sin\varphi + \sin\varphi', \\ z = \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}, \end{cases}$$

la surface (27) est de translation et a pour équation

$$(28)\qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} z;$$

c'est l'hélicoïde gauche à plan directeur; d'après les

formules (26), elle est aussi le lieu du point mobile

$$(29)\qquad \begin{cases} x = \lambda(\cos\psi + \cos\psi'), \\ y = \lambda(\sin\psi + \sin\psi'), \\ z = \dfrac{\psi + \psi'}{2}, \end{cases}$$

où λ est un paramètre arbitraire; pour chaque valeur de λ, on a un mode nouveau de génération comme surface de translation; toutes les courbes génératrices sont les hélices circulaires obtenues en coupant la surface par un cylindre de révolution arbitraire contenant l'axe Oz.

Les formules (26) conduisent en même temps à la surface

$$(30)\qquad \begin{cases} x = \cos\varphi - \lambda\cos\psi = \lambda\cos\psi' - \cos\varphi', \\ y = \sin\varphi - \lambda\sin\psi = \lambda\sin\psi' - \sin\varphi', \\ 2z = \quad\varphi - \quad\psi = \quad\psi' - \quad\varphi', \end{cases}$$

dont les deux modes de génération sont mis en évidence, surface qui a pour équation

$$(31)\qquad x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos 2z.$$

Cette nouvelle surface a retrouvé un centre de symétrie, conformément à la théorie générale; elle est périodique, de révolution, et tout entière comprise entre deux cylindres de révolution d'axe Oz et de rayon $1+\lambda$ et $1-\lambda$.

Nous pouvons remarquer qu'au point de vue général où nous nous étions placés dans les paragraphes précédents, une transformation homographique quelconque est indifférente, pourvu qu'elle conserve le plan de l'infini. Au point de vue de la réalité, nous pouvons obtenir des formes bien distinctes. Par exemple, changeons dans l'équation (31) x, y, z en ix, iy, iz; nous

obtenons, si λ est > 0, une surface de translation réelle d'équation

$$x^2 + y^2 = 2\lambda \operatorname{ch} 2z - 1 - \lambda^2, \tag{32}$$

où les quatre réseaux de translation sont tout entiers imaginaires, tandis qu'ils sont réels sur la surface (31). De même changeons z en iz dans (31), nous avons une nouvelle surface de translation à réseaux imaginaires

$$x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \operatorname{ch} 2z \tag{33}$$

de forme bien différente, suivant que λ est positif ou négatif. Changeons dans (31), (32) ou (33) y en iy, nous avons trois surfaces qui, en réalité, se réduisent à deux :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos 2z, \\ x^2 - y^2 = 2\lambda \operatorname{ch} 2z - 1 - \lambda^2. \end{array}\right. \tag{34}$$

Ces deux nouvelles surfaces sont réelles et à réseaux de translation tous imaginaires.

De même l'hélicoïde (28) aurait donné, par la substitution de iy et iz à y et z, une surface réelle

$$\frac{y}{x} = \operatorname{th} z \tag{35}$$

ayant une infinité de modes de génération par courbes toutes imaginaires.

La plupart des surfaces de Sophus Lie sont transcendantes; elles possèdent des propriétés importantes. L'étude détaillée de toutes ces surfaces serait trop longue ici; elle exigerait d'étudier d'abord le cas où la quartique Q est indécomposable et de genre 3, 2, 1 ou 0; dans le cas de genre 2, il faudrait encore distinguer si le point double est à tangentes réelles et distinctes, ou point de rebroussement, ou point double isolé; dans le cas de genre 1 ou 0, mêmes remarques avec cette complication que les points doubles peuvent

être isolés, ou qu'un point double unique peut compter pour deux ou même trois, etc.

De même dans le cas de la quartique décomposée en une cubique et une droite, il faudrait envisager le genre de la cubique et la nature des points communs à la cubique et à la droite.

Dans le cas de deux coniques, les seuls caractères distinctifs sont fournis par la disposition des points communs aux deux coniques. Par exemple, si les quatre points sont distincts et réels, on profite de la transformation homographique du plan pour envoyer à l'infini sur Ox et Oy deux sommets du triangle conjugué commun, ce qui est possible d'une infinité de façons par une transformation réelle; on peut alors prendre pour coniques de base du faisceau ponctuel étudié plus haut les deux coniques

$$x(1-y)=0, \qquad y(1-x)=0, \tag{36}$$

et alors on trouve sans peine la surface d'équation

$$Ae^x + Be^y + Ce^z = 1 \tag{37}$$

signalée par M. Darboux (*loc. cit.*, p. 160).

Je crois intéressant de terminer cette étude en indiquant dans quels cas on trouve des surfaces algébriques et de donner les formes réduites de ces surfaces, en tenant compte aussi, pour la réalité, des diverses formes attachées à un même type réduit.

5. Traitons d'abord le cas de quartique Q indécomposable; si elle est de genre non nul, elle admet au moins une intégrale de première espèce, fonction essentiellement transcendante, intégrale de la forme

$$\int \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

où α, β, γ sont des constantes numériques déterminées; avec nos notations, cette intégrale s'écrit

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z;$$

il est donc impossible que X, Y, Z soient algébriques toutes trois, donc chacune des courbes génératrices, ainsi que la surface, est transcendante.

Il n'y a donc qu'à supposer la quartique Q unicursale; exprimons x, y rationnellement en t; chacune des intégrales

$$(38)\qquad \int \frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt, \qquad \int \frac{y\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt, \qquad \int \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt$$

porte sur une fraction rationnelle en t qui n'a d'autres pôles que les valeurs de t correspondant aux points multiples; si la courbe possède trois points doubles distincts à tangentes distinctes, chaque point double donne deux pôles simples, donc la surface est transcendante, chacune des coordonnées étant exprimée par une somme de termes rationnels et de termes logarithmiques. Si, au contraire, chaque point double est point de rebroussement, on obtient des pôles doubles et l'on constate en faisant l'intégration que chaque intégrale est algébrique; ce point résulte de la théorie générale des intégrales abéliennes, mais ici il nous suffira de le constater. Si la courbe Q a trois points de rebroussement, l'un d'eux est sûrement réel, nous le supposerons à l'origine; si les deux autres sont imaginaires, nous pouvons d'une infinité de façons, par une transformation homographique réelle, les supposer confondus avec les points cycliques et l'on sait qu'alors la courbe est une cardioïde, dont nous prenons l'équation

sous les formes

$$(39)\qquad \begin{cases} (x^2+y^2-2Rx)^2 = 4R^2(x^2+y^2), \\ \rho = 2R(\cos\omega+1), \end{cases}$$

suivant qu'il s'agit de coordonnées cartésiennes ou polaires. En posant $\tang\frac{\omega}{2} = t$, on a aisément

$$(40)\qquad \begin{cases} x = 4R\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad y = 8R\dfrac{t}{(1+t^2)^2}, \\ x^2+y^2 = \dfrac{16R^2}{(1+t^2)^2}, \qquad x^2+y^2-2Rx = \dfrac{8R^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{1}{4}F'_y \equiv y(x^2+y^2-2Rx-2R^2). \end{cases}$$

On constate sans peine que $\frac{dx}{dt}$ et F'_y ne diffèrent que par un facteur numérique; comme on peut multiplier X, Y ou Z par un facteur arbitraire, on a donc à calculer les intégrales

$$(41)\qquad \begin{cases} \int dt = t, \qquad \int\frac{(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{1+t^2}, \\ \int\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Coupons la cardioïde par une droite : soient t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre des quatre points obtenus; on sait que

$$\sum t_i, \quad \sum\frac{t_i}{1+t_i^2} \quad \text{et} \quad \sum\frac{1}{1+t_i^2}$$

sont constantes, quelle que soit la droite; supposons en particulier la droite parallèle à Oy, les t_i sont deux à deux égaux et de signe contraire, donc

$$\sum t_i = 0, \qquad \sum\frac{t_i}{1+t_i^2} = 0.$$

pour avoir la dernière somme, prenons l'axe Oy lui-même; on a alors

$$t_1 = t_2 = \infty, \qquad t_3 = t_4 = 1, \qquad \sum \frac{1}{t_i^2 + 1} = 1.$$

Nous aurons donc une surface de translation S ayant son centre à l'origine en prenant

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(t_1 + t_2), \\ x &= \frac{2t_1}{1 + t_1^2} + \frac{2t_2}{1 + t_2^2}, \\ y &= \frac{2}{1 + t_1^2} + \frac{2}{1 + t_2^2} - 1. \end{aligned} \right.$$

Comme on vérifie aisément les relations

$$x = \frac{2(t_1 + t_2)(1 + t_1 t_2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} = \frac{8z(1 + t_1 t_2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)},$$

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{8(1 + t_1 t_2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)},$$

une simple comparaison montre que l'équation de la surface S est

$$(43) \qquad z(x^2 + y^2) = x + z.$$

On trouve ainsi une surface à centre du troisième degré lieu des milieux des cordes de la cubique gauche

$$(44) \qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{4}{1 + t^2} - 1.$$

ou encore lieu des milieux des cordes de la cubique

$$(45) \qquad z = -\frac{t}{2}, \qquad x = \frac{-4t}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{-4}{1 + t^2} + 1,$$

symétrique de la précédente par rapport à l'origine.

Chacune des cubiques (44) et (45) est l'enveloppe sur la surface (43) des cubiques génératrices de l'une ou l'autre série; la cubique (44) et la cubique (45) sont deux asymptotiques particulières de la surface. La cubique (44) partage la surface en deux régions telles que par chaque point de l'une passent deux cubiques réelles du système (44), et que par chaque point de l'autre région ne passe aucune cubique réelle de ce système.

On peut remarquer que la surface est engendrée si l'on veut par le cercle d'équations

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= z_0, \\ x^2 + y^2 &= 1 + \frac{x}{z_0}, \end{aligned}\right.$$

dont le plan reste parallèle à xOy et dont la projection sur xOy engendre un faisceau ponctuel.

Remarquons maintenant qu'en remplaçant x, y, z par ix, iy, iz la surface étudiée est remplacée par une surface homothétique S_1, encore réelle, d'équation

$$(47)\qquad z(x^2 + y^2) + x + z = 0,$$

engendrée cette fois par des cubiques toutes imaginaires; la nouvelle surface sera lieu des milieux des cordes des cubiques (imaginaires conjuguées l'une de l'autre)

$$(48)\qquad z = \frac{t}{2}, \quad x = \frac{4t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{-4i}{1 - t^2} + i,$$

ou encore

$$(49)\qquad z = \frac{t}{2}, \quad x = \frac{4t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{4i}{1 - t^2} - i.$$

Dans les équations (42), remplaçons x et z par ix

et iz, et en même temps t_1 et t_2 par it_1 et it_2; nous obtenons une nouvelle surface S_2 réelle du troisième degré, engendrée de deux façons différentes par des cubiques réelles. L'équation de S_2 est

$$z(-x^2+y^2) = x+z \tag{47}$$

avec la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(t_1+t_2), \\ x &= \frac{2t_1}{1-t_1^2} + \frac{2t_2}{1-t_2^2}, \\ y &= \frac{2}{1-t_1^2} + \frac{2}{1-t_2^2} - 1 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Au paragraphe 1, j'ai expliqué en détail que la quartique Q est, si l'on veut, la trace sur le plan $z=1$ du cône directeur des tangentes de la courbe C qui engendre la surface par sa translation. Pour la surface S d'équation (43), x, y, z désignant les coordonnées d'un point de la cubique génératrice, $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont donc les coordonnées dans le plan $z=1$ d'un point de Q; or, pour passer de S à S_2, on a remplacé x par ix et z par iz, donc dans cette transformation on conserve la coordonnée x d'un point de Q, mais on multiplie la coordonnée y par i.

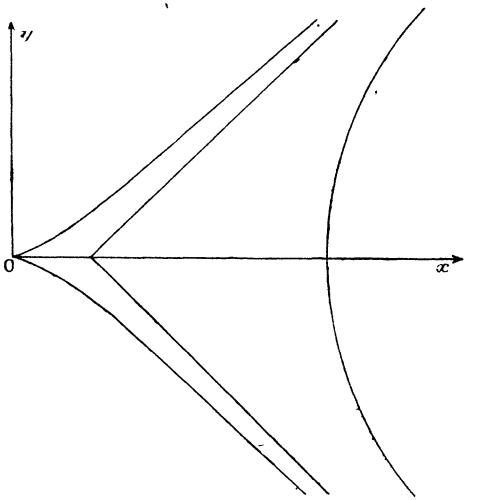
Cela revient à remplacer la cardioïde par la quartique

$$(x^2-y^2-2Rx)^2 - 4R^2(x^2-y^2) = 0, \tag{49}$$

qui a un point de rebroussement à l'origine et deux autres à l'infini dans les directions $x \pm y = 0$. Toute quartique unicursale à trois points de rebroussements

réels et distincts peut être ramenée par une perspective ou transformation homographique réelles à coïncider avec cette quartique (49); donc nous n'avons pas de calculs nouveaux à faire dans le cas où l'on passe de trois points de rebroussements, dont un seul est réel, au cas où les trois sont réels [1]. La forme de cette nouvelle quartique (*fig.* 3) montre qu'il y a des droites la rencontrant en quatre points réels, de sorte qu'il y a

Fig 3.



des points de la surface S_2 où les quatre cubiques qui y passent sont réelles. Comme plus haut, les deux cubiques symétriques

$$(50)\qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{4}{1-t^2} - 1;$$

$$(51)\qquad z = \frac{-t}{2}, \qquad x = \frac{-4t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{-4}{1-t^2} + 1$$

---

[1] Dans le cas de trois points de rebroussements réels, on peut,

sont des asymptotiques de S_2, des séparatrices; S_2 est le lieu des milieux des cordes de chacune. Enfin, en remplaçant dans S_2 x, y, z par ix, iy, iz, on a une nouvelle surface S_3 réelle d'équation

$$z(x^2 - y^2) = x + z \tag{52}$$

engendrée par la translation de quatre cubiques imaginaires toutes quatre. Les surfaces S, S_1, S_2, S_3 forment un cycle complet.

Je ferai remarquer que la surface S_2 ne diffère pas de la surface $xyz + x + y + z = 0$ signalée par Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1895); il suffit de poser

$$x - y = x_1, \qquad x + y = y_1, \qquad z = \frac{z_1}{2}$$

dans l'équation de S_2 pour la ramener à la forme de Poincaré.

D'autre part, toutes les cubiques gauches qui ont trois points à l'infini peuvent, par une transformation homographique réelle conservant le plan de l'infini, être ramenées soit à la cubique (44), soit à la cubique (50); nous en concluons que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche qui a trois points distincts à l'infini est une surface de translation à centre du troisième degré, ayant deux modes de génération.

Nous verrons plus loin que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche dont les points à l'infini ne sont pas distincts est encore une surface du troisième degré, ayant encore deux modes de génération, mais cette fois dépourvue de centre.

(*A suivre.*)

---

si l'on veut, transformer Q en une hypocycloïde à trois rebroussements.