NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Sur des systèmes articulés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 395-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__395_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R1e]

SUR DES SYSTÈMES ARTICULÉS;

PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Considérons d'abord dans le plan m points A_1, $A_2, \ldots, A_m$ et n points $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Relions par des tiges rigides tous les points A à tous les points B (mais non les points A entre eux, ni les points B). On a ainsi mn tiges. Ces tiges étant supposées articulées aux points A et aux points B, pour quelles valeurs de m et de n, le système constitué sera-t-il déformable?

La figure formée par les $m+n$ points considérés dépend de $2(m+n)$ paramètres, dont $2(m+n)-3$ seulement sont des paramètres de grandeur. Comme mn conditions lui sont imposées, à savoir la constance des diverses longueurs A_iB_j, on voit que le système ne sera, en général, déformable que si l'on a

$$2(m+n)-3 > mn,$$

ce qui peut s'écrire

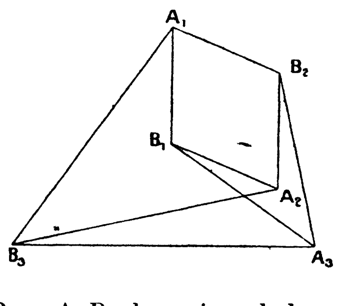
$$(1) \qquad (m-2)(n-2) < 1.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que si l'un des deux nombres m et n est égal à 2 ou à 1. On est ainsi conduit à des solutions banales.

Dans le cas où $m = n = 3$, l'inégalité (1) se change en égalité, et le système est strictement indéformable, à moins, peut-être, qu'il n'existe entre les diverses longueurs $A_i B_j$ certaines relations. On voit aisément que la figure est constituée par un hexagone dont les côtés ainsi que les diagonales joignant les sommets opposés ont des longueurs données. Les points A sont trois sommets non consécutifs de cet hexagone, les points B sont les trois autres.

Il y a donc lieu de rechercher si, dans des cas exceptionnels, un tel hexagone peut être déformable. Or, on reconnaît que le dispositif connu de Peaucellier, convenablement particularisé, fournit une solution du problème.

Soient, en effet (*voir* figure), $A_1 B_1 A_2 B_2$ un losange



articulé, $A_1 B_3$ et $A_2 B_3$ deux tiges de longueurs égales. On sait que si, le point B_3 étant fixe, le point B_1 décrit un cercle, le point B_2 décrit aussi un cercle, inverse du premier par rapport au point B_3. Les centres des deux cercles sont alignés sur le point B_3, et leurs rayons aboutissant en B_1 et en B_3 doivent couper sous le même angle la droite $B_3B_1B_2$, d'où il résulte que ces rayons se coupent sur A_1A_2. Si donc on fait décrire au point B_1 un cercle dont le centre A_3 soit sur A_1A_2, le cercle décrit par B_2 aura aussi son centre en A_3. Réalisons alors les tiges rigides B_1A_3, B_2A_3 et B_3A_3, l'ensemble de la figure représente un système articulé déformable : on y reconnaît un hexagone $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$, ayant pour diagonales A_1B_2, B_1A_3, A_2B_3.

On peut généraliser légèrement la définition du système, en supposant que $A_1B_1A_2B_2$ soit, non pas un losange, mais un *rhomboïde*

$$(A_1B_1 = A_1B_2,\ A_2B_1 = A_2B_2),$$

A_1B_3 et A_2B_3 satisfaisant à la relation

$$\overline{A_1B_3}^2 - \overline{A_2B_3}^2 = \overline{A_1B_1}^2 - \overline{A_2B_1}^2,$$

qui oblige les points B_1, B_2, B_3 à rester alignés. Cette généralisation du système de Peaucellier est connue.

On pourrait rechercher s'il existe d'autres solutions du probleme.

2. Si l'on se pose le même problème dans l'espace, l'inégalité (1) doit être remplacée par la suivante :

$$3(m+n) - 6 < mn$$

ou

$$(m-3)(n-3) < 3.$$

Le cas intéressant est celui où l'on a $m = 4$, $n = 6$, pour lequel l'inégalité précédente se change en égalité. On obtient ainsi un système de 24 tiges qui sera, en général, strictement indéformable. Il y aurait lieu de rechercher tous les cas de déformabilité.

On en trouve un en imposant au système d'être symétrique par rapport à une droite (ce qui, dans les problèmes de ce genre, conduit fréquemment à des solutions).

Considérons en effet la figure formée par cinq points de l'espace A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 et une droite X, et complétons-la par les points A_3, A_4, B_4, B_5, B_6 respectivement symétriques des cinq premiers points par rapport à X.

La figure dépend de $3 \times 5 + 4 - 6 = 13$ paramètres de grandeur. Les 24 distances A_iB_j sont deux à deux égales entre elles, en sorte qu'en assujettissant la figure à ce que ces distances soient invariables, on ne lui impose que 12 conditions. On a donc bien construit un système articulé déformable, de la sorte considérée.

3. On peut aussi, en s'appuyant sur d'autres considérations, construire un système de même sorte, *les points* A, *ainsi que les points* B, *étant en nombre infini.*

Envisageons, à cet effet, une ellipse E et une hyperbole H, focales l'une de l'autre, et ayant pour équations en coordonnées rectangulaires :

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0,$$

$$\text{(H)} \qquad \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad y = 0,$$

avec la condition

$$(1) \qquad a^2 - b^2 = c^2.$$

Les coordonnées d'un point quelconque M de E peuvent s'écrire :

$$x_1 = a\cos u, \qquad y_1 = b\sin u, \qquad z_1 = 0,$$

et les coordonnées d'un point quelconque N de H :

$$x_2 = c\,\mathrm{ch}\,v, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = b\,\mathrm{sh}\,v,$$

u et v étant deux paramètres.

On a, comme expression de la distance des points M et N,

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = (a\cos u - c\,\mathrm{ch}\,v)^2 + b^2\sin^2 u + b^2\,\mathrm{sh}^2 v,$$

et, après des transformations faciles, en tenant compte de (1),

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = (a\,\mathrm{ch}\,v - c\cos u)^2.$$

Cela posé, considérons un nouveau couple de coniques focales l'une de l'autre :

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{E}') \quad \dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} - 1 = 0, & z = 0 & \\ & & (a'^2 - b'^2 = c'^2), \\ (\mathrm{H}') \quad \dfrac{x^2}{c'^2} - \dfrac{z^2}{b'^2} - 1 = 0, & y = 0 & \end{array}$$

dont les points M′ et N′ seront définis au moyen de paramètres u' et v', analogues à u et v. Au point M faisons correspondre le point M′, au point N le point N′, par les relations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c'\cos u' = c\cos u, \\ a'\,\mathrm{ch}\,v' = a\,\mathrm{ch}\,v. \end{array} \right.$$

On aura

$$\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN}.$$

Il en résulte immédiatement que, si l'on relie un nombre quelconque de points M à un nombre quelconque de points N par des tiges rigides, le système articulé ainsi constitué est déformable. Les points M restent constamment sur une ellipse, les points N constamment sur l'hyperbole focale de cette ellipse. On voit même que *le degré de liberté du système est le second*, puisqu'il n'y a aucune rèlation nécessaire entre l'ellipse E′ et l'ellipse E.

Il resterait à discuter l'étendue de la déformation possible du système, supposé physiquement réalisé. Je laisse ce soin au lecteur.